状態価格，リスク中立確率，そして確率的割引ファクター

相　模　裕　一

序

この研究ノートの目的は，以下の３点である。

第１に，資産価格決定の３つの方法である状態価格，リスク中立確率，そして確率的割引ファクターの関係を明らかにすること。第２に，確率的割引ファクターと代表的個人の最適化行動の関係を明らかにし，併せてリスク回避度との関係を検討すること。そして，第３に具体的数値例を用いて，３つの資産価格決定法によるオプション理論価格を求めることである。

この研究ノートでは議論を単純化するため，２期間モデル（今期ｔ＝０と来期ｔ＝１）のみを用いる。はじめに，資産価格決定に関する論文，テキストでは同じ概念のものに別の用語が用いられているので，ここで整理しておく。

まず，状態価格は「アロー証券」の価格であり，リスク中立確率（測度）とマーチンゲールは同義語である。また確率的割引ファクターは，「状態価格密度」，「状態価格デフレーター」，「状態価格カーネル」（Pricing kernel）とも同義である。

本稿の構成は以下の通りである。まずⅠ節において，資産価格の決定に重要な「ファイナンス理論の基本定理」について説明する。続くⅡ節において，状態価格とリスク中立確率の関係を明らかにし，状態価格と生起確率との関係を示す確率的割引ファクターについて触れる。Ⅲ節においては，代表的個人の期待効用最大化の１階の条件式より，確率的割引ファクターを導き，状態価格と生起確率そしてリスク中立確率と生起確率の変換可能性について考察する。

また，リスク回避度の変化による状態価格や資産価格への影響についても明らかにする。

Ⅳ節においては，配当行列の各要素に具体的数値例を用いて，状態価格，リスク中立確率，そして確率的割引ファクターを求め，3つの資産価格決定方法でオプションの理論価格を求めることとする。最後に今後の課題について触れる。

Ⅰ．ファイナンスの基本定理について

この節では，資産価格決定において中核的な役割を果たす「基本定理」を説明する。

まず，証券数が n で状態数が s の抽象的な市場を想定する。期間は今期（ｔ＝0）と来期（ｔ＝1）の2期間とする。証券の価格ベクトルを q，s×n の行列 D を配当行列とし，（q，D）を市場と呼ぶことにする。ここで市場の無裁定条件について検討を行うが，その前に以下の議論で用いる記法と用語について整理しておく。

＜記法の注意＞

1． $x \equiv (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ に対して

1.1 $x \geq 0 \leftrightarrow x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

1.2 $x > 0 \leftrightarrow x \geq 0$かつ $x \neq 0$

1.3 $x \gg 0 \leftrightarrow x_1 > 0, \dots, x_n > 0$

2． $q^0 = (q_1^0, \dots, q_n^0) \in R_{++}^n = \{x \in R^n | x \gg 0\}$： 今期の証券価格

2.1 $q^1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \in R_{+}^n = \{x \in R^n | x > 0\}$ ：来期の証券価格

3． $S \equiv \{1,2, \dots, s\}$ ： 状態(事象)集合

4． $D = \left(d_{ij} \middle| i \in S, j = 1,2, \dots, n\right) : (m, n)$配当行列

5． $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in R^n$：ポートフォリオ

$\theta_j > 0$ならば，買い持ち　$\theta_j < 0$ならば，空売り

6． $\langle \theta, q^0 \rangle = \theta_1 q_1^0 + \theta_2 q_2^0 + \cdots + \theta_n q_n^0$　：R^nの内積

ここで，無裁定条件を定義しよう。

ポートフォリオ$\theta(\in R^n)$ が裁定であるとは，次のいずれかの条件をみたすことである。

ⅰ． $\langle q^0, \theta \rangle \leq 0$　かつ　$D\theta > 0 \in R^n$

ⅱ． $\langle q^0, \theta \rangle < 0$　かつ　$D\theta \geq 0 \in R^n$

これより，市場が無裁定であるとき，以下の基本定理が成立する。

基本定理 1「市場が無裁定である必要十分条件は, 状態価格が存在することである。」
また，市場が完備である時，すなわち証券数と状態数が等しいとき（n＝s）以下の定理が成立する。
基本定理 2「市場が無裁定でかつ完備であることと，状態価格が一意的に存在することとは同値である。」

まず基本定理 1 から証明しよう。そのためには,「Stiemke の補題」を示しておこう。
Stiemke の補題
「(m,n)行列Aにたいして$Ax=0$となる$x \gg 0$が存在するための必要十分条件は，
${}^tAy>0$となる y が存在しないことである。」
（証明）
はじめに，以下の補題の成立を確認しよう。
R^nの線形部分空間Kと，その直交補空間$K^{\perp}$に対して，次の 2 条件は同値である。
① $K \cap R_+^n = \{0\}$　　② $K^{\perp} \cap R_{++}^n \neq \emptyset$
②→①　を示す。$K^{\perp} \cap R_{++}^n \neq \emptyset$　より，$k \in K^{\perp}$かつ$k \gg 0$よって任意の$x \gg 0$に対して$\langle k,x \rangle > 0$になる。これより，kとxは直交しない。
$K^{\perp}$と直交するKの非負ベクトルは0ベクトルしかなく，$K \cap R_+^n = \{0\}$となる。
①→②　を背理法で示す。$K^{\perp} \cap R_{++}^n = \emptyset$　のとき，分離定理より，$K^{\perp}$とR_{++}^nを分離する超平面Hが存在する。Hの法線ベクトル$h(h \neq 0)$で次の条件を満たすものを考える。
$\forall x \in K^{\perp}, \langle h,x \rangle \leq 0$　$\forall x \in R_{++}^n, \langle h,x \rangle \geq 0$
これより，$x \in K^{\perp}$　ならば$\langle h,x \rangle = 0$　となる。よって$h \in (K^{\perp})^{\perp} = K$
また$h>0$より，$h \in K$ならば①と矛盾する。すなわち①と②は同値となる。
(m,n)行列Aにたいして，$\mathrm{Im}({}^tA) = \{{}^tAy \in R^n | y \in R^m\}$，　$ker(A) = \{x \in R^n | Ax = 0\}$

より，$\left(ker(A)\right)^{\perp} = \mathrm{Im}({}^tA)$，　$\left(\mathrm{Im}({}^tA)\right)^{\perp} = ker(A)$

よって$\mathrm{Im}({}^tA)$と$ker(A)$は互いに直交補空間となる。
ここで，$K = \mathrm{Im}({}^tA)$として，上記の①と②を書き換えると，
①　$\{{}^tAy \in R^n | y \in R^m\} \cap R_+^n = \{0\}$　　②　$\{x \in R^n | Ax = 0\} \cap R_{++}^n \neq \emptyset$
これは Stiemke の補題そのものである。
次にこの Stiemke の補題を用いて基本定理 1 を示そう。
市場が無裁定であるということは,

$\begin{pmatrix} -q^0 \\ D \end{pmatrix}\ {}^t\theta > 0$ となる $\theta \in R^n$ が存在しないことである。このことは，

Stiemke の補題より，ある $\omega \in R^{s+1}, \omega \gg 0$ が存在し，以下の式が成立する。

$({}^t(-q^0) \quad {}^tD)\ {}^t\omega = 0$　ここで $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_s)$

すなわち

$\omega_0 q^0 = {}^tD\ {}^t\mu, \quad \mu = (\omega_1, \dots, \omega_s) \gg 0$ と同値になる。よって

$\varphi = \frac{1}{\omega_0}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_s \end{pmatrix}$　とおくと，$q^0 = {}^tD\varphi$　となり，φ は状態価格になる。

逆に状態価格があれば，Stiemke の補題より市場は無裁定となる。（証明終）

次に基本定理 2 を証明する。

（証明）

市場が無裁定であるとき，基本定理 1 より，$q^0 = {}^tD\varphi$　となる。

ここで状態価格が 2 つあり，$q^0 = {}^tD\varphi_1 \quad q^0 = {}^tD\varphi_2$　とする。

これより，${}^tD(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$　となる。

しかし，n＝s より，${}^tD$は正方行列で単射線形写像となることより，$\varphi_1 = \varphi_2$となる。

（証明終）

Ⅱ．状態価格，リスク中立確率，そして確率的割引ファクター

この節では，状態価格とリスク中立確率（測度），そして状態価格と確率的割引ファクターの関係について整理する。

まず，リスク中立的な評価法とは，来期の証券価格の期待値を無リスク利子率で割り引いて証券価格を決定する方法である。その期待値計算に用いられるのがリスク中立確率である。

市場が無裁定ならば，無リスク債券の理論価格は，状態価格の和に等しくなるはずである。

なぜならすべての状態に対応するアロー証券を持つことは，リスクが完全に無くなることであり，アロー証券価格の和＝状態価格の和は，無リスク債券の価格と等しくなる。

よって，状態価格を$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$とし，無リスク債券の収益率（利子率）を rとすると，

$1 = (1+r)(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_S)$

となる。

これより，リスク中立確率を $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_s$ とすると，

$$\pi_j = \frac{\varphi_j}{\sum_{i=1}^{s} \varphi_i} \quad j \in \{1,2,\dots,s\} \quad \pi_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{s} \pi_j = 1,$$

となる。

ここで株式α の来期の株価を$p\alpha$とし，状態 j での株価をd_jとすると，

$$p\alpha = \sum_{j=1}^{s} \varphi_j d_j \quad ・・・・(1)$$ と表せる。

$$\sum_{j=1}^{s} \varphi_j = \frac{1}{1+r}$$ より $$\varphi_j = \frac{1}{1+r}\pi_j$$ となることより，リスク中立確率を用いて

$$p\alpha = \frac{1}{1+r}\sum_{j=1}^{s} \pi_j d_j ・・・・(2)$$ と表せる。

(1)と(2)はそれぞれ，状態価格とリスク中立確率による資産価格（株価）決定式である。

また，ここで状態集合$S \equiv \{1,2,\dots,s\}$に対する生起確率を$\{f_1, f_2, \cdots f_s\}$とする。

$$f_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{s} f_j = 1,$$

このf_jを用いて確率的割引ファクター（状態価格密度）ρ_jを次のように定義する。

$$\rho_j = \frac{\varphi_j}{f_j} \quad j \in \{1,2,\dots,s\}$$ これより，以下の式が成立する。

$$p\alpha = \sum_{j=1}^{s} f_j \rho_j d_j \quad ・・・・(3)$$

(2)と(3)はそれぞれある確率分布の下での期待値と見做すことができる。(2)はリスク中立確率で(3)は生起確率の期待値である。(2)の期待値を E_π (3)の 期待値をE_fとすると，

$$p\alpha = \frac{1}{1+r} E_\pi(d) ・・・・(4)$$

$$p\alpha = E_f(\rho d) \quad ・・・・(5)$$

となることが理解されよう。このことは，次の関係式によるリスク中立確率と生起確率の確率測度の変換とみることができる。

$$f_j\rho_j = \frac{1}{1+r}\,\pi_j \quad j \in \{1,2,\dots,s\} \quad \text{すなわち} \quad \left(1+r\right)\rho_j = \frac{\pi_j}{f_j}$$

Ⅲ．代表的個人の最適化行動

前節で定義した確率的割引ファクターは，代表的個人の最適化行動からも導出される。そこで本節では，代表的個人の期待効用最大化モデルを考え，資産価格決定との関係を検討する。ここでは，簡単化のため，２期間モデル（今期ｔ＝0と来期ｔ＝1）を考える。

期待効用：$E[U(C)] = u(c_0) + \sum_{j=1}^{s} f_j\, v\left(c_{1j}\right)$　・・・・(6)

ここで c_0 は$t=0$ における消費量で，c_{1j} は$t=1$における状態 j の消費量である。
代表的個人の最適化行動は，この期待効用を次の予算制約の下で，最大にすることである。

$c_0 + \langle\varphi, c_1\rangle = \mathrm{W}$　・・・・(7)

但しここで　$\langle\varphi, c_1\rangle = \sum_{j=1}^{s}\varphi_j\, c_{1j}$　また $\varphi_j = \frac{1}{1+r}\pi_j$ より(7)式は次式と同じである。

$$c_0 + \frac{1}{1+r}\langle\pi, c_1\rangle = \mathrm{W} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot (8)$$

(7)の下で，(6)の 最大化の１階の条件を求めると，

$$f_j\frac{\partial v\left(c_{1j}\right)}{\partial c_{1j}} = \varphi_j\frac{du(c_0)}{dc_0} \quad j \in \{1,2,\dots,s\} \cdot\cdot\cdot\cdot (9)$$

ここで記号の簡略化をし $\partial v_j = \frac{\partial v\left(c_{1j}\right)}{\partial c_{1j}}$，　$\Delta u = \frac{du(c_0)}{dc_0}$ とすると(9)は以下の式となる。

$$f_j\,\partial v_j = \varphi_j\Delta u \quad j \in \{1,2,\dots,s\} \cdot\cdot\cdot\cdot (10)$$

これより，

$$\frac{\varphi_j}{f_j} = \frac{\partial v_j}{\Delta u} \quad j \in \{1,2,\dots,s\} \cdot\cdot\cdot\cdot (11)$$

これは，確率的割引ファクター（Pricing kernel）が今期と来期の消費の限界代替率となることを示している。また，同様に(8)の下での最大化の条件は，以下の式となる。

$$\frac{\pi_j}{f_j} = \left(1+r\right)\frac{\partial v_j}{\Delta u} \quad j \in \{1,2,\dots,s\} \cdot\cdot\cdot\cdot (12)$$

上記の議論では，状態価格が既知の状況，すなわちアロー証券が購入可能で，すべての状態でのリスクヘッジが可能な状況下から，確率的割引ファクターを求めた。しかし，現実にはすべての状況に対応するアロー証券が取引されているわけではない。むしろ，今期と来期の消費の限界代替率を既知として，(11)より状態価格を求める方が自然であろう。

次に，リスク回避度と資産価格の関係を検討するため，リスク回避度をパラメーターとして組み込んだ効用関数を以下のように設定しよう。

$$E[U(C)]=\frac{1}{1-\delta}{c_0}^{1-\delta}+\frac{1}{1-\delta}\beta\sum_{j=1}^{s}f_j{c_{1j}}^{1-\delta}\quad\cdot\cdot\cdot\cdot(13)$$

ここで$0<\delta<1,\quad 0<\beta<1$　である。βは主観的割引率とする。

この効用関数において，相対的リスク回避度はδ である。

(13)において，(7)の下での最適条件を求めると，以下の式を得られる。

$$\frac{\varphi_j}{f_j}=\beta\left(\frac{c_0}{c_{1j}}\right)^{\delta}\quad\text{または}\quad\varphi_j=\beta\left(\frac{c_0}{c_{1j}}\right)^{\delta}f_j\quad\cdot\cdot\cdot\cdot(14)$$

これより，リスク回避度の上昇が確率的割引ファクターの上昇を引き起こすこと，そして，生起確率が一定の時，状態価格が上昇することが理解されよう。

ここで，$c_0=c_{1j}\quad j\in\{1,2,\dots,s\}$　とすると，（すなわちリスク無しの場合は）

$\varphi_j=\beta f_j$　となり，$\sum_{j=1}^{s}\varphi_j=\beta\sum_{j=1}^{s}f_j=\beta$

これより，$\beta=\dfrac{1}{1+r}$　となる。　また$c_0\neq c_{1j}$のとき

$\sum_{j=1}^{s}\varphi_j=\dfrac{1}{1+r}$より，状態価格の上昇が利子率の低下となることが分かる。

Ⅳ. 具　体　例

ここで具体例として，株式 A，株式 B そして国債の３資産と３つの状態のケースについて考えよう。３つの証券の一株あたりの単価が次表で与えられている。

（なお単位は百円である。）

	価　格	状態 1	状態 2	状態 3
株式 A	10	10	15	4
株式 B	12	20	10	8
国債	0.95	1	1	1

この表より，状態価格　$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, を求める。

$$\begin{bmatrix} 10 & 15 & 4 \\ 20 & 10 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 0.95 \end{pmatrix}$$

これを解くと，$\varphi_1 = 0.3 \quad \varphi_2 = 0.4 \quad \varphi_3 = 0.25$　となる。

ここで国債（無リスク債権）の収益率（利子率）を r とすると，

$1 = (1 + \mathrm{r})(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$　よって $\dfrac{1}{1+r} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0.95$　これより，$\mathrm{r} \fallingdotseq 0.053$

ここでリスク中立確率　π_1, π_2, π_3 を求めると，

$\pi_j = \dfrac{\varphi_j}{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3} \quad j \in \{1,2,3\}$となり，

$\pi_1 = \dfrac{0.3}{0.95} = \dfrac{6}{19} \quad \pi_2 = \dfrac{8}{19} \qquad \pi_3 = \dfrac{5}{19}$　となる。

次に，確率的割引ファクター $\rho_i \; (i = 1,2,3)$ を求めよう。

そのためには，状態１，２，３の生起確率　f_i　を以下のように

$f_1 = \dfrac{1}{4} \quad f_2 = \dfrac{1}{2} \quad f_3 = \dfrac{1}{4}$　とする。これより $\rho_i = \dfrac{\varphi_i}{f_i} \; (i = 1,2,3)$となることより，

$\rho_1 = 1.2 \quad \rho_2 = 0.8 \quad \rho_3 = 1.0$

これより，株 B のコールオプション（行使価格 K＝10）とプットオプション（行使価格 K＝12）の価格を状態価格，リスク中立確率，そして確率的割引ファクターの３つの要因から求めよう。

生起確率		0.25	0.5	0.25
状態	価　格	状態 1	状態 2	状態 3
株式 A	10	10	15	4
株式 B	12	20	10	8
国債	0.95	1	1	1
CallB（K＝10）	?	10	0	0
PutB（K＝12）	?	0	2	4

株 B のコールオプションの価格は

状態価格法: Call B (K＝10)＝10×0.3＝3,

リスク中立確率法: Call B (K＝10)＝ $\frac{1}{1+r} \times 10 \times \frac{6}{19} = 0.95 \times 10 \times \frac{6}{19} = 3$

確率的割引ファクター法: Call B (K＝10)＝ $f_1 \times \rho_1 \times 10 = 0.25 \times 1.2 \times 10 = 3$

同様な計算で株 B のプットオプションの価格は以下のようになる。

状態価格法 PutB (K＝12)＝0.4×2＋0.25×4＝1.8

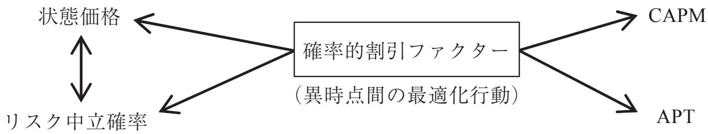
リスク中立確率法: PutB (K＝12)＝ $\frac{1}{1+r} \times \left(\frac{8}{19} \times 2 + \frac{5}{19} \times 4\right) = 1.8$

確率的割引ファクター法: PutB (K＝12)＝ $f_2 \times \rho_2 \times 2 + f_3 \times \rho_3 \times 4 = \rho_2 + \rho_3 = 1.8$

以上の計算から分かるように，３つの資産価格決定法は同値である。状態価格の計算が最も簡便であるが，状態価格を知ることは現実には困難である。

Ⅴ．今後の課題

この研究ノートでは２期間モデルによって状態価格，リスク中立確率，そして確率的割引ファクターの関係を明らかにしてきた。特に，確率的割引ファクターは代表的個人の期待効用最大化との関係について検討を行った。今後の課題としては次の2点が重要である。一つは，確率的割引ファクターは CAPM や Sharpe 比と密接な関係があり, 確率的割引ファクターが様々な資産価格理論を統一的に把握する「核」となることを示すことである。図式すれば，以下のようになる。



２つめの課題は，多期間モデルへの拡張である。ファイナンスの基本定理については離散形は Harrison-Kreps（1979）により，そして連続形は Delbaen-Schachermayer（1994）によって既にフィルター付き確率空間で証明されている。すなわち，本ノートの１節でのべた基本定理１と２と同義の「無裁定であることとマーチンゲール測度の存在」および「完備・無裁定であることとマーチンゲールの一意性」である。ここでの課題は，上記の確率的割引ファクターを核にした他の諸概念との関係が，多期間モデルにおいて成立する条件を検討することである。

参　考　文　献

邦語文献

浦谷　規『無裁定原理とマーチンゲール』朝倉書店2005年

小林孝雄・芦田敏夫『新･証券投資論』①理論編　日本経済新聞社2012年

津野義道『ファイナンスの数理入門』共立出版　2007年

野口悠紀雄・藤井眞理子『現代ファイナンス理論』東洋経済新報社2005年

英語文献

Arrow, K “The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing” Review of Economic Studies,31,(1964),91-6

Danthine, J, P and Donaldson, B *Intermediate Financial Theory* Second Edition ELSEVIER Academic press 2005

Delbaen, F and Schachermayer, W “A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing.” Matematische Annalen. 300 (1994) 463-520

Harrison, J, M and Kreps, D, M “Martingale and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets” Journal of Economic Theory 20, (1979) 381-408

LeRoy, S.F and Werner, J *Principles of Financial Economics* Cambridge university press (2001)

Milne, F *Finance Theory and Asset Pricing* Second Edition Oxford university press 2003