金利モデルとマルチンゲール

相　　模　　裕　　一

序

この研究ノートの目的は，今日ファイナンス理論において必要不可欠となったマルチンゲールとギルザノフ定理，そしてその応用について解説することにある。

本稿の構成は以下の通りである。まずⅠ節において，金融工学・数理ファイナンスの出発点となったBlack-scholesモデルについてその骨組みと論理構成について概説する。そしてFeynman-Kacの定理を用いてオプション式を導く。続くⅡ節において，マルチンゲールとギルザノフ定理を紹介し，オプション式を導く。Ⅲ節においては，マルチンゲール・アプローチを多用する金利モデル，特にHeath-Jarrow-Mortonモデルについて触れ，マルチンゲールが研究上のみならず実務の世界でも必須概念となっていることを紹介する。

Ⅰ．Black-scholes モデル

この節では，オプション理論の定番であるBlack-scholesモデルについて，骨組みと論理構成について概説し，Feynman-Kac の定理を用いてオプション式を導くこととする。

ここで株式と債券の価格変動はすべて確率過程であり，以下で示される確率微分方程式で表されるものとする。

株価の変動過程　$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t d\, W_t$　　・・・・・・(1)

債券の変動過程　$dB_t = rB_t\, dt$　　・・・・・・(2)

S_tはt期の株価，B_tはt期の債券価格である。μ，σ，rは定数とする。通常μは期待値，σはボラティリティ，rは安全利子率である。ここでW_t標準的ブラウン運動の確率過程である。確率微分方程式(1)の解は以下の (3)式で示される。この証明は，伊藤

の確率微分のスキームの説明の後に与える。

$$S_t = S_0 exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$

ここでW_tは以下の３つの性質を備えているとする。

① $W_0 \equiv 0$

② $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ に対して，$W_{t_2} - W_{t_1} \sim N(0,\ t_2 - t_1)$

③ $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 < \infty$ に対して，$W_{t_4} - W_{t_3}$ と $W_{t_2} - W_{t_1}$は互いに独立である。

次に，伊藤の確率微分のスキームについて示しておく。

$$(dW_t)^2 = dt \quad dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0 \qquad (dt)^2 = 0$$

これより，

$$dS_t = S_t\left[exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\} - 1\right]$$

$$= S_t\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t + \frac{1}{2}\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t\right\}^2 + \cdots\right]$$

$$= S_t(\mu\, dt + \sigma dW_t)$$

以上より，確率微分方程式(1)の解は (3)式で示されることが分かる。

つぎにオプションの価格式を求めよう。

$C(S_t, t)$ をオプション式とすると，確率微分より

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial {S_t}^2}(dS_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial t}dS_t \cdot dt$$

$$= \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial {S_t}^2}(dS_t)^2$$

ここでスキームより，

$$(dS_t)^2 = (\mu S_t\, dt + \sigma S_t dW_t)^2 = \sigma^2 {S_t}^2 dt$$

よって

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2\right)dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}\sigma S_t dW_t$$

となる。

$$\mu_C = \frac{1}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2\right)$$

$$\sigma_C = \frac{1}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial S_t}\sigma S_t\right)$$

と置くと，以下の式を得る。

オプション価格の変動過程　$\dfrac{dC}{C} = \mu_C\, dt + \sigma_C\, d\, W_t$　・・・・・・(4)

無裁定原理より，単位リスク当たりの超過収益率(リスクの市場価格)は資産間で同じとなるから，

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\mu_C - r}{\sigma_C} \quad \cdots\cdots(5)$$

よって

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\dfrac{\partial C}{\partial t} + \dfrac{\partial C}{\partial S_t}\mu S_t + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 C}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2 - rC}{\dfrac{\partial C}{\partial S_t}\sigma S_t}$$

これより，以下の式を得る。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2 - rC = 0 \quad \cdots\cdots(6)$$

これが，Black-scholes の方程式である。

　では，次に，この Black-scholes の方程式を解き，オプション価格式を求めよう。

　Black-scholes の原論文では，変数変換により熱伝導式に帰着させて解いたが，ここでは，Feynman-Kac の定理を用いよう。すなわちオプション価格式 $C = C(S_t, t)$ を Black-scholes 方程式の境界値問題の解として求めることである。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2 - rC = 0$$

初期条件　$C(S_t, T) = \varphi(S_T)$ ・・・・・・(7)

C を上記２式の解と仮定する。このとき，C は次式で表せる。

$C(S_t, t) = E\left[\varphi(X_t)\cdot e^{-r(T-t)} | X_t = S_t\right]$ ・・・・・・(8)

ただし，X_tは以下の確率微分方程式に制約される。

$$dX_t = rX_t\, dt + \sigma X_t d\, Z_t \quad \cdots\cdots(9)$$

ここで　Z_t はウィーナー過程である。

権利行使価格を K とし，$\varphi(S_T)$ をオプションのペイオフ関数とするならば，

$$\varphi(S_T) = max\{S_T - K, 0\}$$

となり，

$C(S_t,t) = E\left[max\{X_T - K, 0\} \cdot e^{-r(T-t)} | X_t = S_t\right]$

となる。これより，

$$X_T = X_t exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(Z_T - Z_t)\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (10)$$

ここで，$X_t = S_t$とし，$Z_T - Z_t \sim N(0, T-t)$　より$Z_T - Z_t = \sqrt{T-t} \cdot V$　としても期待値は同じである。ただし，$V \sim N(0,1)$ である。

従って，

$$C(S_t,t) = E\left[max\left\{S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\cdot V} - K, 0\right\}\right] \cdot e^{-r(T-t)} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (11)$$

これより，Vの密度関数を$f(v) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$　とすると，

$$C(S_t,t) = \int_{-\infty}^{\infty} max\left\{S_t e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\cdot v} - e^{-r(T-t)}K, 0\right\} \cdot f(v)dv \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (12)$$

積分範囲を D とすると，

$D = \left\{v \middle| S_t\, exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t} \cdot v\right\} - K > 0\right\}$となり，

$$C(S_t,t) = \int_D S_t e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\cdot v} \cdot f(v)dv - \int_D e^{-r(T-t)}K \cdot f(v)dv \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (13)$$

ここで積分範囲を整理すると，

$$D = \left\{v \middle| v > \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \log\frac{Ke^{-r(T-t)}}{S_t} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}\right\}$$

となり，

$d_t = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \log\dfrac{S_t}{Ke^{-r(T-t)}} + \dfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$ とおくと，

$D = \left\{v \middle| v > \sigma\sqrt{T-t} - d_t\right\}$ より，

$$\begin{aligned} C(S_t,t) &= \int_{\sigma\sqrt{T-t}-d_t}^{\infty} S_t e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\cdot v} \cdot f(v)dv - \int_{\sigma\sqrt{T-t}-d_t}^{\infty} e^{-r(T-t)}K \cdot f(v)dv \\ &= \int_{\sigma\sqrt{T-t}-d_t}^{\infty} S_t e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\cdot v} \cdot f(v)dv - e^{-r(T-t)}K \int_{-\infty}^{d_t-\sigma\sqrt{T-t}} f(v)dv \cdot \cdot \cdot (14) \end{aligned}$$

ここで，

$$e^{\sigma\sqrt{T-t}\cdot v}\cdot f(v)=e^{\sigma\sqrt{T-t}\cdot v}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(v-\sqrt{T-t}\right)^2}e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$$

よって，

$$C(S_t,t)=\int_{\sigma\sqrt{T-t}-d_t}^{\infty}S_t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(v-\sqrt{T-t}\right)^2}dv-e^{-r(T-t)}K\int_{-\infty}^{d_t-\sigma\sqrt{T-t}}f(v)dv\ \cdot\cdot\cdot(15)$$

第１項で $u=v-\sigma\sqrt{T-t}$ の変数変換を行うと，

$$C(S_t,t)=\int_{-\infty}^{d_t}S_tf(u)\,du-e^{-r(T-t)}K\int_{-\infty}^{d_t-\sigma\sqrt{T-t}}f(v)dv\ \cdot\cdot\cdot(16)$$

標準正規分布の分布関数を$N(\cdot)$とすると，

(15)の第１項は$S_tN(d_t)$，第２項は$Ke^{-r(T-t)}N\left(d_t-\sigma\sqrt{T-t}\right)$となることより，

$$C(S_t,t)=S_tN(d_t)-Ke^{-r(T-t)}N\left(d_t-\sigma\sqrt{T-t}\right)\ \cdot\cdot\cdot(17)$$

となる。

Ⅱ．マルチンゲール・アプローチによるオプション価格の決定

この節においては，マルチンゲールによるオプション価格式の導出を行う。１節で展開した確率過程のモデルでは，モデルの背後にある確率空間を明示せずに，伊藤の確率微分のスキームに従う演算のみでオプション価格式を導いた。Feynman-Kac の定理を用いる時も，厳密には可積分条件の吟味，σ-加法族での適合性が必要であるが，単調増加のフィルトレーションと可積性を前提に議論を行ってきた。

しかし，マルチンゲールの議論や測度変換で用いるラドン・ニコディム，ギルザノフ定理には確率空間を明示し，σ加法族，確率測度，可測性の吟味が不可欠である。

ここで確率空間を$(\Omega,\mathcal{F},P)$とする。Ωを根本事象，$\mathcal{F}$をσ加法族，そしてPを確率測度とする。期間$[0,\mathrm{T}]$内の任意の時点t期において計測できる事象を$\mathcal{F}_t$とする。単調増加のフィルトレーションを仮定するので，$u<t$ ならば　$\mathcal{F}_u\subset\mathcal{F}_t$　となる。

確率変数 X について，$\mathcal{F}_u$の下での条件付期待値を$E_P[X|\mathcal{F}_u]$と表し，$s<u$ならば

$E_P[E_P[X|\mathcal{F}_u]|\mathcal{F}_s]=E_P[X|\mathcal{F}_S]$

また，条件付期待値は期待値であるから線形性も保持している。すなわち定数aとbについて

$E_P[aX+bY|\mathcal{F}_s]=a\,E_P[X|\mathcal{F}_u]+bE_P[Y|\mathcal{F}_u]$　となる。

確率過程 $\mathrm{X}=\{X_t\}$とは$X_t:\Omega\to\mathrm{R}$ の可測な関数である。マルチンゲールであるとは，

1　X_tが$\mathcal{F}_t$可測であること。

2　任意のsに関して$E[|X_s|] < \infty$

3 任意の $0 \leq u \leq t \leq \mathrm{T}$ に関して，$E_P[X_t|\mathcal{F}_u] = X_u$

また，確率測度をPからQに変えた確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ に関しても$E_Q[X|\mathcal{F}_u]$　はマルチンゲールの性質を保存する。

ここで，マルチンゲール表現定理を以下に示しておく。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$と$\{\mathcal{F}_t : t \in [0, \mathrm{T}]\}$に関して，任意の２つのマルチンゲール$M_t$と$N_t$を考えると，ある確率過程$\eta_t$ が存在し，

$$N_t = N_0 + \int_0^t \eta_u \, dM_u \quad \cdot\cdot\cdot(18)$$

となる。η_uは$previsible$とよばれる。(17) は，以下のラドン・ニコディム定理の拡張版といえよう。

可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ に２つの確率測度Pとそれに絶対連続な確率測度Qを考える。このとき

$$\int_A \varphi dP = Q(A) \quad \cdot\cdot\cdot(19)$$

を満たす関数φが存在する。ここで(19) を満たす別の関数ηが存在すれば，

$$P(\omega \in \Omega : \varphi(\omega) \neq \eta(\omega)) = 0$$

という意味で一意的である。このφ をラドン・ニコディムの微分係数とよび，

$$\varphi = \frac{dQ}{dP}$$

と表す。このように確率変数は X ひとつだけの場合は，一意にラドン・ニコディムの微分を決めることができるが，確率過程の場合は，確率変数が連続ないしは非可算無限になるので，確率過程の path 上に微分を定めなければならない。

Baxter=Rennie[7]の例に倣い，測度Pの確率過程W_tが測度Qの下では平均γtだけシフトしたドリフト付の確率過程になっている場合を想定する。このとき各 t 期で

$$P\text{の密度関数}\ \frac{d}{dx} P\{W_t < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

$$Q\text{の密度関数}\ \frac{d}{dx} Q\{W_t < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\gamma t)^2}{2t}}$$

となり，t 期でのラドン・ニコディム微分は

$$\frac{dQ}{dP}(W_t) = \frac{\frac{d}{dx}Q\{W_t < x\}}{\frac{d}{dx}P\{W_t < x\}} = e^{\gamma x - \frac{1}{2}\gamma^2 t}$$

となる。これは１時点での関係式であって，確率過程全体のものではない。そこで[0, T]に対して近似的に離散的な分割 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$ を考える。

各間隔は同じで　$t_{i+1} - t_i = \Delta$, $i \in \{1,2,\cdots n\}$　$n \to \infty$のとき$\Delta \to 0$ となる。

$$\frac{dQ}{dP}\left(W_{t_1}, W_{t_2}, W_{t_3}, \cdots, W_{t_n}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{n}\frac{d}{dx}Q\left\{W_{t_k} < x\right\}}{\prod_{k=1}^{n}\frac{d}{dx}P\left\{W_{t_k} < x\right\}}$$ として，

$$\frac{dQ}{dP}(\omega) = \lim_{n\to\infty}\frac{dQ}{dP}\left(W_{t_1}, W_{t_2}, W_{t_3}, \cdots, W_{t_n}\right) = e^{\gamma W_T(\omega) - \frac{1}{2}\gamma^2 T} \quad \cdot\cdot\cdot (20)$$

を得る。これより，以下のギルザノフの定理が成立するのが理解されよう。ギルザノフの定理は Cameron-Martin-Girsanov の定理ともよばれる。以下に Baxter=Rennie[7]から引用すると，

W_tがPのもとでブラウン運動であり，γ_tが$previsible$な確率過程であり，

$$E_P\left[exp\frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2 dt\right]$$

$< \infty$ を満足するならば，測度Q が存在して，次の３つが成立する。

1)　QはPと同値である。

2)　$\frac{dQ}{dP} = exp\left(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2 dt\right)$

3)　$\widetilde{W_t} = W_t + \int_0^T \gamma_u du$ はQのもとでブラウン運動である。

これでマルチンゲール・アプローチによるオプション価格式導出の準備が整った。

１節と同様に，S_tをt期の株価，B_tをt期の債券価格 とする。単純化のため，$B_t = e^{rt}$とする。株価については，以下の式を用いる。

$$dS_t = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)S_t\,dt + \sigma S_t d\,W_t \quad \cdot\cdot\cdot (21)$$

$$S_t = S_0 exp(\mu t + \sigma\,W_t) \quad \cdot\cdot\cdot (22)$$

ここで，株価を債券価格で割り，確率測度を変換することで，トレンドが消え，マーチンゲールとなることを確認しよう。

$$Z_t = \frac{S_t}{B_t} = e^{-rt} S_0 exp(\mu t + \sigma W_t) = S_0 exp\big((\mu - r)t + \sigma W_t\big)$$ より，

$$dZ_t = Z_t\left(\left(\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t\right) = Z_t \sigma \cdot d\left(W_t + \frac{\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} t\right)$$ となり，

$$\gamma = \frac{\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$$ とおくと，$dZ_t = Z_t \sigma \cdot d(W_t + \gamma t)$ となる。

ここで　$\widetilde{W_t} = W_t + \gamma t$ すると，$dZ_t = Z_t \sigma \cdot d\widetilde{W_t}$ となり，確率過程での期待値が消える。

$\frac{dQ}{dP} = e^{\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T}$　のとき，$E_Q\left[\frac{dZ_t}{Z_t}\right] = 0$　また，

$0 \leq u < t \leq T$ に関して，$E_Q[Z_t | \mathcal{F}_u] = Z_u$ より，Z_t は Q のもとでマーチンゲールになる。

ここで，株式と債券のポートフォリオについて説明する。

株式保有単位数を φ_t，債券保有単位数を θ_t とする。ポートフォリオ (φ_t, θ_t) の価値は

$V_t = \varphi_t S_t + \theta_t B_t \ , t \in [0, \mathrm{T}]$　となり，自己充足的なポートフォリオであることは，

$dV_t = \varphi_t dS_t + \theta_t dB_t$　となることである。

１節と同様，権利行使価格を K とし，X をオプションのペイオフ関数とする。これより

$X = max\{S_T - K, 0\}$

$E_t = E_Q[B_t^{-1} X | \mathcal{F}_t]$ とすると，$(\Omega, \mathcal{F}, Q, \mathcal{F}_t : t \in [0, \mathrm{T}])$ において E_t はマルチンゲールになる。

すなわち，$u \leq t$ に対して，$E_Q[E_t | \mathcal{F}_u] = E_u$ なお T 期では，$E_T = B_T^{-1} X$ となる。

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ 上に E_t と Z_t の２つのマルチンゲールがあるので，マルチンゲール表現定理を使える。つまり，

$previsible$ な $\varphi_t, t \in [0, \mathrm{T}]$ が存在し，　$dE_t = \varphi_t \cdot dZ_t$ となる。この φ_t より，以下の関係式から θ_t を求めることができる。すなわち無裁定原理と複製可能性より，

$\theta_t = E_t - \varphi_t Z_t, t \in [0, \mathrm{T}]$

ここで求められるポートフォリオ (φ_t, θ_t) は明らかに自己充足的である。

また，

$E_t = E_0 + \int_0^t \varphi_u \, dZ_u$　　但し，$E_0 = E_Q[B_T^{-1} X | \mathcal{F}_0]$ となる。

この E_0 が求めるオプション価格である。

$E_0 = E_Q[B_T^{-1} X | \mathcal{F}_0] = E_Q[e^{-rT} max\{S_T - K, 0\} | \mathcal{F}_0]$

$$= e^{-rT} E_Q \left[max \left\{ S_0 exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma \widetilde{W_T} \right\} - K, 0 \right\} \right] \quad \cdot \cdot \cdot (23)$$

この(23)式は，(11)式$C(S_t, t)$の$t = 0$のときの値とおなじである。これより，１節の(12)式以降の計算でオプション価格式を求めることができる。

Ⅲ．金利モデルへの応用

近年，金利分析において，測度変換やマルチンゲール・アプローチが用いられる。この節ではその例として Heath-Jarrow-Morton(HJM)[10]モデルについて取り上げよう。HJM モデルは，先渡しレートに基づく金利モデルである。モデルの構成要素は，先渡しレート$f(t,T)$，安全債券B_t，短期レートr_t，ゼロクーポン債価格$p(t,T)$である。原論文では，n 個の独立したブラウン運動$\{W_t^1, W_t^2, \cdots, W_t^n\}$ を用いているが，ここでは単純化のため，１つの確率過程のみを用いる。

先物レートの確率微分方程式は，

$$df(t,T) = \alpha(t,T)\, dt + \sigma d\, W_t \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (24)$$

$$f(0,T) = c(T)$$

として表され，安全債券価格は

$$dB_t = r_t B_t\, dt \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (25)$$

$$B_t = exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \quad B_0 = 1 \quad r_s = f(s,s) = c(s) + \sigma\, W_s + \int_0^s \alpha(u,s) du$$

として設定する。ゼロクーポン債価格については，

$$p(t,T) = exp\left(-\int_t^T f(t,s) ds\right) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (26)$$

として与えよう。これより，割引ゼロクーポン債価格の変動がマルチンゲールとなるような同値マーチンゲール測度をギルザノフの定理から求め，２節の議論と同様にマルチンゲール表現定理よりゼロクーポン債と安全債券の保有単位を求める。これにより，先渡しレートと短期レートを導き出すことができる。

割引ゼロクーポン債価格 $Z_t = {B_t}^{-1}\, p(t,T)$ より，

$$dZ_t = Z_t \left\{ \left(-\int_t^T \alpha(t,s) ds + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)^2 \right) dt - \sigma(T-t) d\, W_t \right\}$$

$$= -\sigma(T-t)Z_t\left(d\,W_t + \frac{-\int_t^T \alpha(t,s)ds + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)^2}{-\sigma(T-t)}dt\right)$$

$$= -\sigma(T-t)Z_t d(W_t + \gamma_t^T)$$

ただし，$\gamma_t^T = \dfrac{-\int_t^T \alpha(t,s)ds + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)^2}{-\sigma(T-t)}$

ここで　$\widetilde{W_t} = W_t + \gamma_t^T$　とし，$\widetilde{W_t}$がブラウン運動となるように測度変換をおこなう。よって

$$dZ_t = -\sigma(T-t)Z_t d\widetilde{W_t}$$

となる。今，ゼロクーポン債保有単位数をφ_t，安全債券保有単位数をθ_tとする。２節と同様に複製ポートフォリオ (φ_t,θ_t)を考えよう。

X をポートフォリオのペイオフとする。これより

$E_t = E_Q[B_t^{-1}X|\mathcal{F}_t]$ とすると，　E_tはマルチンゲールになる。確率空間$(\Omega,\mathcal{F},Q)$上に E_tとZ_tの２つのマルチンゲールがあるので，マルチンゲール表現定理を使える。

つまり，$previsible$なφ_tが存在し，　$dE_t = \varphi_t \cdot dZ_t$ となる。このφ_tより２節と同様に，θ_tを求めることができる。すなわち

$$\theta_t = E_t - \varphi_t Z_t, t \in [0,\mathrm{T}]$$

ここで求められるポートフォリオ (φ_t,θ_t)は明らかに自己充足的である。$\alpha(t,s)$を求めて，上記の$\widetilde{W_t}$を用いると先渡しレートと短期レートは以下のように表される。（HJM [10]の例よる。）

$$f(t,T) = f(0,T) + \sigma\widetilde{W_t} + \sigma^2\left(Tt - \frac{1}{2}t^2\right)$$

$$r_t = f(t,t) = f(0,t) + \sigma\widetilde{W_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$$

Ⅳ．結　　語

この研究ノートでは，HJM モデルより，マルチンゲール・アプローチの用いられ方を見てきた。このような金利モデル，とくに短期金利のマルチンゲール・モデルは多

数存在し，実際に使用されている。代表的なものが次の３つである。

バシチェック（Vasiček）モデル　$dr_t = a(m - r_t)dt + \sigma d W_t$

CIR（Cox-Ingersoll-Ross）モデル　$dr_t = a(m - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t} d W_t$

ドーサン（Dothan）モデル　$dr_t = ar_t dt + \sigma r_t d W_t$

mは平均でバシチェックと CIR は平均回帰モデル，ドーサンは幾何ブラウン運動モデルと言われる。他に，ホー・リーモデルやハル・ホワイトモデルが有名である。

最近の LIBOR やスワップ市場については，測度論の用語を用いることなく議論することは非常に困難である。従来，数理経済学は現実非妥当性が強調されてきたが，ファイナンスでは，全く逆で高度な数理化が進展している。

参考文献

邦語文献

[1] 石村直之『確率微分方程式入門』共立出版 2014 年
[2] 浦谷　規『無裁定原理とマルチンゲール』朝倉書店 2005 年
[3] 木島正明『金融工学』日経文庫 2002 年
[4] 三浦良造『デリバティブの数理』サイエンス社 2000 年
[5] 藤田岳彦『ファイナンスの確率解析入門』講談社 2002 年
[6] 舟木直久『確率論』朝倉書店 2004 年

英語文献

[7] Baxter, M and Rennie *Finanncial Calculus* Cambridge university press 1996
[8] Björk, T *Arbitrage Theory in Continuous Time* 3rd Oxford university press 2009
[9] Harrison, J, M and Kreps, D, M “Martingale and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets” Journal of Economic Theory 20, (1979) 381-408
[10] Heath, D., Jarrow, R and Morton, A “Bond Pricing and the Tern Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. ”Econometrica, (1992) 60, 77-105
[11] Steele, M *Stochastic Calculus and Financial Applications* Springer 2000