産業動学に関する研究ノート（理論編）*)

加　　藤　　　　　浩

この研究ノートは，マルコフ完全産業動学（Markov-perfect industry dynamics）の基本モデルを解説するものである。具体的な内容について述べると，Ericson and Pakes（1992）および Ericson and Pakes（1995）において構築された産業動学モデルの基本構造を列挙し，さらに提示された命題や定理の証明について，その議論の流れを丁寧に説明していくのである。Ericson&Pakes モデルの構造自体は簡潔であり，導かれる結果も明解であるものの，そこに至るまでの数学を用いた論理展開が複雑難解である。この複雑難解な議論を，可能なかぎり詳細に辿っていくことが本ノートの目的である。かかるノートは，今後，産業動学の研究を取り組む上で大きな助けになるものと期待している。なお, Ericson&Pakes の論文には，いくつかの誤り（と筆者が考えるもの）があるので，その部分の修正や表記の変更を施したうえで議論を進めていく。

1．記号の定義と仮定

(1) モデルの設定

・離散無限期間モデル $t = 0, 1, \cdots$

・既存企業は毎期，市場から退出（停止）するか事業を継続するかを決め，継続するときにはさらに投資水準を決定する。

---

*) この研究ノートの随所に，「SLP 勉強会」で得た知見が含まれている。勉強会のメンバーである，相模裕一教授と三宅伸治准教授には，この場を借りてお礼を申し上げる。言うまでもないことであるが，本論文におけるありうべき誤りは，すべて筆者の勉強不足・知識不足が原因である。

・既存企業の状態変数は２つある。まず，企業固有の状態（効率性パラメータ）ωで，企業の粗利益と投資費用に影響を与える。いま一つは，各ωの状態にいる企業数の分布を表す産業構造$\boldsymbol{s}$である。
・次期の状態ω'は確率的に変動し，その変動は今期の状態ωと自企業の投資水準，および市場外部の要因に影響を受ける。
・次期の産業構造$\boldsymbol{s}'$は確率的に変動し，その変動は今期の産業構造$\boldsymbol{s}$と今期の参入に依存する。
・投資と退出は，今期の状態（$\omega, \boldsymbol{s}$）で決定される（定常マルコフ戦略）。
・無数の潜在的な参入企業が存在し，状態$\omega = 0$にいる。毎期，市場に参入するかどうかを決める。第t期に参入を決定したときは，第$t+1$期の期初に状態ω^0へと推移して既存企業となる。

モデルの基本構造

$$\{A(\omega,\boldsymbol{s}), p(\omega' \mid \omega,\cdot), q_{\omega}(\hat{\boldsymbol{s}}' \mid \boldsymbol{s}), [m(\boldsymbol{s}), P(\omega^0), \{x_m^e\}_{m=1}^{\infty}], \phi, c(\omega), \beta\}_{(\omega,\boldsymbol{s})\in\Omega\times S}$$

（2）既存企業について

$\omega \in \Omega$　・・・既存企業の状態

$\Omega \subset \mathbb{Z}$　・・・状態ωの集合

（仮定Ω）$\Omega = \{0, 1, \cdots, K\}$（コンパクト集合）

s_{ω}　・・・状態ωにいる企業数

$\boldsymbol{s} = \{s_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$　・・・産業構造

$S \subset \mathbb{Z}_+^{\infty}$　・・・実現可能な産業構造の集合

$\succsim$　・・・Sに対する既存企業の選好（完備な前順序[1]）

1)　$\succsim$が前順序であるとは，

$\boldsymbol{s} \succsim \boldsymbol{s}$（反射律）

$\boldsymbol{s}^1 \succsim \boldsymbol{s}^2$，$\boldsymbol{s}^2 \succsim \boldsymbol{s}^3 \Rightarrow \boldsymbol{s}^1 \succsim \boldsymbol{s}^3$（推移律）．

$\succsim$が完備であるとは，

$\boldsymbol{s}^1 \succsim \boldsymbol{s}^2$，$\boldsymbol{s}^2 \succsim \boldsymbol{s}^1$のどちらかが成立する。

（仮定 S）$S = \{\boldsymbol{s}^1, \cdots, \boldsymbol{s}^H\}$（コンパクト集合）

$\sigma = (\omega, \boldsymbol{s})$　・・・状態変数

$\Sigma = \Omega \times S \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+^\infty$　・・・産業の状態空間

$\phi \in \mathbb{R}$　・・・残余価値（退出時に回収できる価値）

$\beta \in (0, 1)$　・・・割引因子

$(1-\beta)\phi$　・・・永久にϕを得るときの現在価値総和の年平均

$A(\omega, \boldsymbol{s})$　・・・粗利益

（仮定 A-1）$\boldsymbol{s}^1 \succ \boldsymbol{s}^2 \Rightarrow A(\omega, \boldsymbol{s}^2) \geq A(\omega, \boldsymbol{s}^1)$

（仮定 A-2）$\omega_1 > \omega_2 \Rightarrow A(\omega_1, \boldsymbol{s}) \geq A(\omega_2, \boldsymbol{s})$

（仮定 A-3）$\lim_{\omega \to \infty} A(\omega, \boldsymbol{s}) = \overline{A}$

（仮定 A-4）$\lim_{\omega \to -\infty} A(\omega, \boldsymbol{s}) < (1-\beta)\phi$

（仮定 A-5）[2] $A(\omega, \boldsymbol{s}) \leq (1-\beta)\phi + o\left(\frac{1}{n}\right)$，$\forall\, \boldsymbol{s} \in \hat{S}_n(\omega)$，$\forall \omega$

$\hat{S}_n(\omega) = \left\{ \boldsymbol{s} \in S \,\middle|\, \sum_{\omega' \geq \omega} s_{\omega'} \geq n \right\}$　・・・状態がωよりも高い状態にいる企業の数が n 以上となる産業構造の集合（図１）

仮定 A-5は，既存企業の数と粗収益との関係について述べた仮定である。自企業よりも状態の良い企業の数が少なければ$A(\omega, \boldsymbol{s}) > (1-\beta)\phi$となるが，その数がある水準を超えると$A(\omega, \boldsymbol{s}) < (1-\beta)\phi$となる。

---

2) $o\left(\frac{1}{n}\right)$は$\frac{1}{n}$よりも高次の無限小であることを示す。つまり，$\dfrac{o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 0$ $(n \to \infty)$

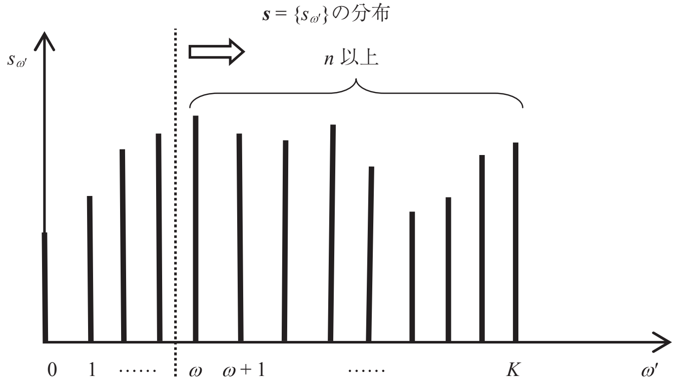

図１　$\mathbf{s} \in \hat{S}_n(\omega)$ の一例

$R(\omega, \mathbf{s}; x) = A(\omega, \mathbf{s}) - c(\omega)x$　・・・純収益

$x \in \mathbb{R}_+$　・・・投資水準

$c(\omega) \in [\underline{c}, \infty)$，　$\underline{c} > 0$　・・・投資の単位費用

（仮定 c）$\omega_1 > \omega_2 \Rightarrow c(\omega_1) \le c(\omega_2)$

(3) 状態変数の推移について

・ωの推移について

$p(\omega' | \omega, x)$　・・・状態ωの推移確率

$\mathrm{supp}[p] = \{\omega - k_2, \cdots, \omega, \cdots, \omega + k_1\}$　・・・p のサポート

$p(\omega' | \omega, x)$は$\pi(\omega' - \eta | \omega, x)$と p_0の畳み込みで表される。

$$p(\omega' = z \,|\, \omega, x) = \sum_{\eta' = -k_2}^{0} \pi(z - \eta' \,|\, \omega, x) p_{\eta'} \,. \tag{1}$$

$\omega' = \omega + \tau + \eta$　・・・次期の状態

τ（$= 0, 1, \cdots, k_1$）　・・・投資が次期の状態に与える影響

η（$= -k_2, \cdots, 0$）　・・・市場外部の機会が次期の状態に与える影響

（負の影響）

前期の状態ωに対して，次期の状態ω'のとりうる値は，$\omega' = \omega - k_2, \cdots, \omega, \cdots, \omega + k_1$となる。

$p_0 = \{p_\eta\}_{\eta=-k_2}^{0}$　・・・ηの確率分布

$\pi(z - \eta | \omega, x) = p(\omega' = z | \omega, x, \eta)$　・・・τの確率分布

$\mathrm{supp}[\pi] = \{\omega, \cdots, \omega + k_1\}$　・・・πのサポート

（仮定π-1）$\omega_1 > \omega_2 \Rightarrow \pi(\cdot | \omega_1, x) < \pi(\cdot | \omega_2, x)$　（確率優越）

（仮定π-2）$\dfrac{\partial \pi}{\partial x}(w | \omega, x) < 0$　（$w = \omega$のとき）

（仮定π-3）$\dfrac{\partial \pi}{\partial x}(w | \omega, x) > 0$　（$w = \omega + 1, \cdots, \omega + k_2$のとき）

（仮定π-4）πは x について連続

（仮定π-5）$\dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x^2}(w | \omega, x) < 0$　（$w = \omega + 1, \cdots, \omega + k_2$のとき）

（仮定π-6）$\pi(w | \omega, 0) = \begin{cases} 1 & （w = \omegaのとき） \\ 0 & （その他） \end{cases}$

仮定π-2～仮定π-5は，最適な x が一意となることを保証する仮定である。仮定π-6より，$x = 0$のときは確実に$\omega' = \omega + \eta$となり，次期の状態は今期の状態と同じか，もしくは低下する。

・$\boldsymbol{s}$ の推移について

（仮定 Q-1）確率密度関数 $Q(\boldsymbol{s}' | \boldsymbol{s})$が存在し，産業構造のマルコフ過程を示す。

（仮定 Q-2）Q はフェラー性を持つ[3)]

第 t 期の産業構造が $\boldsymbol{s}$ のとき，第 $t+1$期の産業構造の確率分布関数は，次のように表される。

---

3)　$C(S)$を S 上の有界連続関数空間，$Tf(x) = \sum_{x'} f(x')Q(x' | x)$ とする。Q がフェラー性を持つとは，次の条件を満たすことである。

$$f \in C(S) \Rightarrow Tf \in C(S).$$

$$\sum_{\boldsymbol{s}' \in B} Q(\boldsymbol{s}' \mid \boldsymbol{s}) = \Pr(\boldsymbol{s}_{t+1} \in B \mid \boldsymbol{s}_t = \boldsymbol{s}) \cdot \tag{2}$$

$q_\varpi(\hat{\boldsymbol{s}}' \mid \boldsymbol{s})$　・・・他企業の産業構造 $\hat{\boldsymbol{s}}$ の推移確率

$\hat{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{s} - e_\varpi$　・・・他企業の産業構造（今期）

$e_\varpi = {}^t(0, \cdots, 0, \underset{\uparrow \atop \varpi\text{番目}}{1}, 0, \cdots, 0)$　・・・自企業の産業構造（今期）

$\hat{\boldsymbol{s}}' = \boldsymbol{s}' - e_{\varpi'}$　・・・他企業の産業構造（次期）

（仮定 q）q_ϖはフェラー性を持つ

$q_\varpi(\hat{\boldsymbol{s}}' \mid \boldsymbol{s})$ は $\Pr(\hat{\boldsymbol{s}}' + e_{\varpi'} \mid \boldsymbol{s})$ の $\hat{\boldsymbol{s}}'$ に関する周辺確率である。すなわち，

$$q_\varpi(\hat{\boldsymbol{s}}' \mid \boldsymbol{s}, \eta) = \sum_{\varpi'} Q_\eta(\hat{\boldsymbol{s}}' + e_{\varpi'} \mid \boldsymbol{s}) \tag{3}$$

$$q_\varpi(\hat{\boldsymbol{s}}' \mid \boldsymbol{s}) = \sum_{\eta=-k_2}^{0} q_\varpi(\hat{\boldsymbol{s}}' \mid \boldsymbol{s}, \eta) p_\eta \ . \tag{4}$$

$q_\varpi(\hat{\boldsymbol{s}}' \mid \boldsymbol{s})$ は，企業が最適化問題を解くときに，産業構造の推移に関する信念として用いる。

(4) 参入企業について

$\omega^0 \in \Omega^e$　・・・参入後の状態（参入して既存企業になったときの状態）

$\Omega^e \subset \Omega$　・・・参入後の状態集合

$P(\omega^0)$　・・・ω^0の確率分布

$\mathrm{supp}[P(\omega^0)] = \Omega^e$　・・・$P(\omega^0)$のサポート

$P(\omega^0)$は$\pi^e(\omega^0 - \eta)$と p_0の畳み込みで表される。

$$P(\omega^0) = \sum_{\eta=-k_2}^{0} p_\eta \pi^e(\omega^0 - \eta) \, . \tag{5}$$

$m(\boldsymbol{s})$　・・・参入企業数

（仮定 M）$m(\boldsymbol{s}) \le M, \quad \forall \boldsymbol{s} \in S$

x_m^e　・・・参入企業数が m のときの参入費用

$x_m^e - \beta\phi$　・・・埋没費用

（仮定 x-1）$m' > m \Rightarrow x_{m'}^e \ge x_m^e$

（仮定 x-2）$x_m^e > \beta\phi$

２．最適化問題

(1) 既存企業の最適化問題

逐次問題（SP）は次のようになる。

$$W_t(\omega_t, \boldsymbol{s}_t) = \mathrm{Max}\left\{ \sup_{\{x_\tau, \chi_\tau\}_{\tau=t}^{\infty}} \mathrm{E}_t\left(\sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau-t} R(\omega_\tau, \boldsymbol{s}_\tau; x_\tau) x_\tau + (\chi_{\tau-1} - \chi_\tau)\phi \middle| (\omega, \boldsymbol{s}) \right), \phi \right\}. \quad (6)$$

E_t は確率分布 $\{q_\omega(\hat{\boldsymbol{s}}' \mid \boldsymbol{s})\}$，$\{p(\omega' \mid \omega, x)\}$ を用いて期待値を計算する作用素である。

$$\chi_\tau = \begin{cases} 1 & \text{（継続）} \\ 0 & \text{（退出）} \end{cases}$$　・・・継続・退出決定

ベルマン方程式（FE）は次のようになる。

$$V(\omega, \boldsymbol{s}) = \mathrm{Max}\left\{ \sup_x R(\omega, \boldsymbol{s}; x) + \beta \sum_{\eta'=-k_2}^{0} \sum_{\boldsymbol{s}' \in S} \sum_{\omega' \in \Omega} V(\omega', \boldsymbol{s}') p(\omega' \mid \omega, x, \eta') q_\omega(\hat{\boldsymbol{s}}' \mid \boldsymbol{s}, \eta') p_{\eta'}, \phi \right\}. \quad (7)$$

最適性原理より，（FE）の解である投資政策関数および退出政策関数によって導かれる列 $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$，$\{\chi_t\}_{t=0}^{\infty}$ は，（SP）の上限値を達成する[4)]。

4)　ただし，V に関する有界条件が必要となる。Stokey and Lucus（1989）参照。

(2) 参入企業の最適化問題

参入企業の評価関数は次のようになる。

$$V^e(\mathbf{s},m)=\beta\sum_{\eta'=-k_2}^{0}\sum_{\mathbf{s}'\in S}\sum_{\hat{\omega}_m}\sum_{\omega^0\in\Omega}V(\omega^0,\mathbf{s}'+e_{\omega^0}+\hat{\omega}_m)\pi^e(\omega^0-\eta')\prod_{j=1}^{m-1}\pi^e(\omega_j^0-\eta')q^0(\mathbf{s}'\,|\,\mathbf{s},\eta')p_{\eta'}\,. \quad (8)$$

ω^0　・・・自企業の参入後の状態

ω_j^0　$(j=1,\cdots,m-1)$　・・・他の参入企業の参入後の状態

$e_{\omega^0}+\hat{\omega}_m$　・・・参入企業の産業構造

$\hat{\omega}_m=\sum_{j=1}^{m-1}e_{\omega_j^0}={}^t(0,\cdots,1,\cdots,1,\cdots,1,\cdots,0)$　・・・自企業以外の参入企業の産業構造

$\uparrow$　$\uparrow$

ω_1^0 番目 ω_2^0 番目 $\cdots$

$q^0(\mathbf{s}'\,|\,\mathbf{s},\eta)$　・・・既存企業のみの産業構造の推移確率

$q^0(\mathbf{s}'\,|\,\mathbf{s})$は$\Pr(\mathbf{s}'+e_{\omega^0}+\hat{\omega}_m\,|\,\mathbf{s})$の$\mathbf{s}'$に関する周辺確率である。つまり,

$$q^0(\mathbf{s}'\,|\,\mathbf{s})=\sum_{\omega_j^0}Q_\eta\left(\mathbf{s}'+\sum_{j=1}^{m}e_{\omega_j^0}\middle|\,\mathbf{s}\right) \quad (9)$$

$$q^0(\mathbf{s}'\,|\,\mathbf{s})=\sum_{\eta=-k_2}^{0}q^0(\mathbf{s}'\,|\,\mathbf{s},\eta)p_\eta\,. \quad (10)$$

３．均 衡 条 件

均衡$[\{V(\omega,\mathbf{s}),x(\omega,\mathbf{s}),\chi(\omega,\mathbf{s}),Q(\mathbf{s}'\,|\,\mathbf{s}),m(\mathbf{s})\}_{(\omega,\mathbf{s})\in\Omega\times S},\mathbf{s}^0]$は次の条件を満たす。

（1）$x(\omega,\mathbf{s})$はベルマン方程式を満たす。

$$V(\omega,\mathbf{s})=\mathrm{Max}\left\{\sup_x R(\omega,\mathbf{s};x(\omega,\mathbf{s}))+\beta\sum_{\eta'=-k_2}^{0}\sum_{\hat{\mathbf{s}}'\in S}\sum_{\omega'\in\Omega}V(\omega',\hat{\mathbf{s}}'+e_{\omega'})p(\omega'\,|\,\omega,x(\omega,\mathbf{s}),\eta')q_\omega(\hat{\mathbf{s}}'\,|\,\mathbf{s},\eta')p_{\eta'},\phi\right\}. \quad (11)$$

（2）$\chi(\omega,\mathbf{s}),x(\omega,\mathbf{s})$は１階の条件を満たす。

$$\left\{-c(\omega)+\beta\sum_{\eta'=-k_2}^{0}\sum_{\omega'\in\Omega}\sum_{\hat{\mathbf{s}}'\in S}V(\omega',\hat{\mathbf{s}}'+e_{\omega'})q_\omega(\hat{\mathbf{s}}'\,|\,\mathbf{s},\eta')\frac{\partial p(\omega'\,|\,\omega,x(\omega,\mathbf{s}),\eta')}{\partial x}p_{\eta'}\right\}x(\omega,\mathbf{s})=0 \quad (12)$$

$$\{V(\omega,\mathbf{s})-\phi\}\{\chi(\omega,\mathbf{s})-1\}=0. \quad (13)$$

（3）参入企業の評価関数と参入費用 x_m^e から，参入企業数 $m(\boldsymbol{s})$が決まる。

$$m(\boldsymbol{s})=\begin{cases}0 & (V^e(\boldsymbol{s},m)\le x_m^e, \forall m\text{のとき}) \\ \min\{m \mid V^e(\boldsymbol{s},m)>x_m^e, V^e(\boldsymbol{s},m+1)\le x_{m+1}^e\}. & \end{cases} \tag{14}$$

（4）既存企業・参入企業の最適化行動より，産業構造の推移確率 $Q(\boldsymbol{s}'|\boldsymbol{s})$が定まる。今期の産業構造 $\boldsymbol{s}$ から次期の産業構造 $\boldsymbol{s}'$への推移確率は，状態ωの推移確率と，それぞれの状態へ推移する企業数によって計算される。$i, j \in \Omega$とする。

・各状態ωへ推移する企業数について

y_{ij}　・・・状態 j から状態 i へ推移する企業数（図２上段）

$$Y=\begin{pmatrix} y_{00} & y_{01} & \cdots & y_{0K} \\ y_{10} & y_{11} & \cdots & y_{1K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{K0} & y_{K1} & \cdots & y_{KK} \end{pmatrix}$$　・・・企業数の推移行列

$\mathscr{Y}(\boldsymbol{s}'|\boldsymbol{s})=\{Y|\ Y\cdot e=\boldsymbol{s}',\ e\cdot Y=(m(\boldsymbol{s}),\boldsymbol{s})\}$・・・$\boldsymbol{s}$ から $\boldsymbol{s}'$への産業構造の推移を実現する推移行列 Y の集合

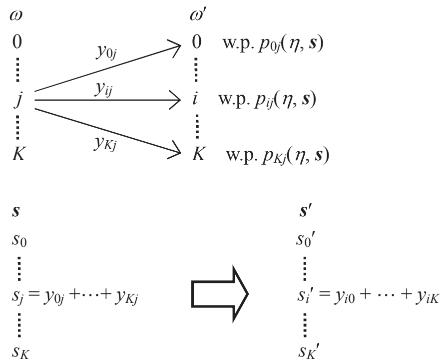

図２　ω, s の推移

$$\boldsymbol{y}_j = \begin{pmatrix} y_{0j} \\ \vdots \\ y_{Kj} \end{pmatrix}$$ ・・・状態 j から各状態へ推移する企業数（Y の列ベクトル）

$(y_{i0}, \cdots, y_{iK})$ ・・・各状態から状態 i へ推移する企業数（Y の行ベクトル）

$$Y \cdot e = \begin{pmatrix} y_{00} & y_{01} & \cdots & y_{0K} \\ y_{10} & y_{11} & \cdots & y_{1K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{K0} & y_{K1} & \cdots & y_{KK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{00} + y_{01} + \cdots + y_{0K} \\ y_{10} + y_{11} + \cdots + y_{1K} \\ \vdots \\ y_{K0} + y_{K1} + \cdots + y_{KK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s'_0 \\ s'_1 \\ \vdots \\ s'_K \end{pmatrix}$$ ・・・次期の産業構造

$$e \cdot Y = (1, 1, \cdots, 1) \begin{pmatrix} y_{00} & y_{01} & \cdots & y_{0K} \\ y_{10} & y_{11} & \cdots & y_{1K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{K0} & y_{K1} & \cdots & y_{KK} \end{pmatrix}$$

$$= (y_{00} + \cdots + y_{K0}, y_{01} + \cdots + y_{K1}, \cdots, y_{0K} + \cdots + y_{KK})$$

$$= (m(\boldsymbol{s}), s_1, \cdots, s_K)$$ ・・・今期の産業構造と参入企業数

・各状態への推移確率について

$$p(\eta, \boldsymbol{s}) = \begin{pmatrix} p_{00}(\eta, \boldsymbol{s}) & p_{01}(\eta, \boldsymbol{s}) & \cdots & p_{0K}(\eta, \boldsymbol{s}) \\ p_{10}(\eta, \boldsymbol{s}) & p_{11}(\eta, \boldsymbol{s}) & \cdots & p_{1K}(\eta, \boldsymbol{s}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{K0}(\eta, \boldsymbol{s}) & p_{K1}(\eta, \boldsymbol{s}) & \cdots & p_{KK}(\eta, \boldsymbol{s}) \end{pmatrix}$$ ・・・状態 ω の推移確率行列

$p_{ij}(\eta, \boldsymbol{s}) = \pi(i - \eta | j, x(j, \boldsymbol{s}))$ ・・・状態 j から状態 i へ推移する確率

$p_{i0}(\eta, \boldsymbol{s}) = \pi^e(i - \eta)$ ・・・参入企業（状態0にいる）が状態 i へ推移する確率

企業数 $s_j = y_{0j} + \cdots + y_{Kj}$ のうち，それぞれの状態 $\omega' \in \{0, \cdots, K\}$ へ推移する企業数が $(y_{0j}, y_{1j}, \cdots, y_{Kj})$ となり，それぞれの推移確率は $(p_{0j}(\eta, \boldsymbol{s}), p_{1j}(\eta, \boldsymbol{s}), \cdots, p_{Kj}(\eta, \boldsymbol{s}))$ と

なる。ゆえに，$(y_{0j}, y_{1j}, \cdots, y_{Kj})$（$j = 1, \cdots, K$）の確率分布は多項分布となり，次のように表される（図２下段）。

$$m_\eta(y_{0j}, y_{1j}, \cdots, y_{Kj} \mid s_j) = \frac{s_j!}{y_{0j}!y_{1j}!\cdots y_{Kj}!}\prod_{i=0}^{K}[p_{ij}(\eta, \mathbf{s})]^{y_{ij}}. \tag{15}$$

同様に，前期に参入した $m(\mathbf{s}) = y_{00} + \cdots + y_{K0}$ の企業が，それぞれの状態へ推移する確率分布は，次のようになる。

$$m_\eta^e(y_{00}, \cdots, y_{K0} \mid m(\mathbf{s})) = \frac{m(\mathbf{s})!}{y_{00}!\cdots y_{K0}!}\prod_{i=0}^{K}[p_{i0}(\eta, \mathbf{s})]^{y_{i0}}. \tag{16}$$

これより，前期の産業構造が $\mathbf{s}$ である条件の下で，次期の産業構造が $\mathbf{s}'$ となる確率は次のように計算される。

$$Q_\eta(\mathbf{s}' \mid \mathbf{s}) = \sum_{Y \in \mathscr{Y}(\mathbf{s}'|\mathbf{s})}\prod_{j=0}^{K} m_\eta(y_{0j}, \cdots, y_{Kj} \mid s_j) m_\eta^e(y_{00}, \cdots, y_{K0} \mid m(\mathbf{s})) \tag{17}$$

$$Q(\mathbf{s}' \mid \mathbf{s}) = \sum_{\eta=-k_2}^{0} p_\eta Q_\eta(\mathbf{s}' \mid \mathbf{s}). \tag{18}$$

$Q(\mathbf{s}'|\mathbf{s})$から，周辺確率 $q_\omega(\hat{\mathbf{s}}' \mid \mathbf{s})$，$q^0(\mathbf{s}'|\mathbf{s})$が計算される。これらの周辺確率が，既存企業・参入企業による最適化で用いられた信念と一致していることが，均衡では要求される（合理的期待）。

以上の均衡条件の下で，いくつかの命題が証明される。命題１より次のことが示される。

$$x(\underline{\omega}(\mathbf{s}) - \tau, \mathbf{s}) = x(\overline{\omega}(\mathbf{s}) + \tau, \mathbf{s}) = 0, \quad \forall \tau \geq 1 \tag{19}$$

なる $\underline{\omega}(\mathbf{s}), \overline{\omega}(\mathbf{s}) \in \Omega$ が存在する。つまり，状態 $\omega \in [\underline{\omega}(\mathbf{s}), \overline{\omega}(\mathbf{s})]$ にいるときには投資を実行し，$\omega < \underline{\omega}(\mathbf{s})$，$\omega > \overline{\omega}(\mathbf{s})$ では投資をしない（市場には残っているかもしれない）。さらに，

$$V(\omega, \mathbf{s}) \begin{cases} = \phi\ （\omega \leq \underline{\underline{\omega}}(\mathbf{s})\text{ のとき}） \\ > \phi\ （\omega > \underline{\underline{\omega}}(\mathbf{s})\text{ のとき}） \end{cases} \tag{20}$$

なる $\underline{\underline{\omega}}(\mathbf{s}) \in \Omega$ が存在する。すなわち，状態 $\omega > \underline{\underline{\omega}}(\mathbf{s})$ では事業を継続し，状態 $\omega \leq \underline{\underline{\omega}}(\mathbf{s})$ では市場から退出する。

$$\overline{\overline{\omega}} = \mathrm{Max}\ \overline{\omega} + k_1 \tag{21}$$

$$\underline{\underline{\omega}} = \min \underline{\underline{\omega}}(\boldsymbol{s}) \tag{22}$$

と置くと，あらゆる既存企業にとり，到達する可能性のある状態ωの集合は$\{\underline{\underline{\omega}},\cdots,\overline{\overline{\omega}}\}$であり，それ以外の状態にたどり着くことはない。この集合を，$\Omega = \{0, 1, \cdots, K\}$と置き換える。これは，仮定Ωに他ならない。

命題２より，状態ωにいる既存企業の数がある水準を超えると，その状態にいる企業は退出することが最適となる。また，系１より，参入企業の数には上限があることが示される。これは仮定 M である。さらに系２より，産業で活動している既存企業の数がある水準を超えると，参入が起こらない。したがって，命題２，系１，系２より，

$$S = \left\{ \boldsymbol{s} = \{s_0, \cdots, s_K\} \middle| \sum_{\omega=0}^{K} s_\omega \leq N \right\} \tag{23}$$

なる N が存在することが分かる。つまり，S はコンパクト集合（有限集合）となり，S の要素の数は,

$$|S| = \sum_{n=0}^{N} {}_{K+1}\mathrm{H}_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{(K+n)!}{K!n!} \tag{24}$$

となる[5)]。そこで，$H = |S|$として，$S = \{\boldsymbol{s}^1, \cdots, \boldsymbol{s}^H\}$と置き換える。仮定 S はこのことを述べている。

１企業が最適化する際に，仮定Ω，仮定 S，仮定 M を前提として，目的関数が計算される。そして，それぞれの既存企業や参入企業が最適化行動を取り，均衡が構築される。均衡において実現する結果としてこれらの仮定が導かれ，各企業が最適化に際して仮定としてきたことと整合的となる。

5)　状態 0〜K に合計 n の企業が分布する組み合わせは，重複組み合わせ ${}_{K+1}\mathrm{H}_n = {}_{K+n}\mathrm{C}_n$ となる。

４．均衡産業動学

企業の最適化行動から $Q(\boldsymbol{s}_t|\,\boldsymbol{s}_{t-1})$が，さらにこれから周辺確率 $q^0(\boldsymbol{s}_t|\,\boldsymbol{s}_{t-1})$が計算される。これを用いると，産業構造の動きが分かる。

$$\boldsymbol{s}_t = (I_{\omega > \underline{\underline{\omega}}(\boldsymbol{s}_{t-1})}\boldsymbol{s}_{t-1})' + \omega_{m(\boldsymbol{s}_{t-1})} \quad (t = 1, 2, \cdots)$$ ・・・産業構造の均衡動学

$\omega_{m(\boldsymbol{s}_{t-1})}$　・・・第 $t-1$期に参入する企業の第 t 期における産業構造

$$I_{\omega > \underline{\underline{\omega}}(\boldsymbol{s}_{t-1})} = \begin{pmatrix} d_{00} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{KK} \end{pmatrix},\quad d_{\omega\omega} = \begin{cases} 1 \ (\omega > \underline{\underline{\omega}}(\boldsymbol{s}_{t-1})\ \text{のとき}) \\ 0 \ (\omega < \underline{\underline{\omega}}(\boldsymbol{s}_{t-1})\ \text{のとき}) \end{cases}$$

$(I_{\omega > \underline{\underline{\omega}}(\boldsymbol{s}_{t-1})}\boldsymbol{s}_{t-1})'$　・・・第 $t-1$期の既存企業のみを考えたときの，$q^0(\boldsymbol{s}_t|\,\boldsymbol{s}_{t-1})$により実現する第 t 期における産業構造

$\{\boldsymbol{s}_t\}_{t=0}^{\infty}$　・・・産業構造の確率過程

$\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{s}^0$　・・・初期の産業構造

・産業構造の確率分布について

$Q(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}') = Q(\boldsymbol{s}'|\,\boldsymbol{s})$とすると，

$$Q = \begin{pmatrix} Q(\boldsymbol{s}^1, \boldsymbol{s}^1) & \cdots & Q(\boldsymbol{s}^1, \boldsymbol{s}^H) \\ \vdots & & \\ Q(\boldsymbol{s}^H, \boldsymbol{s}^1) & \cdots & Q(\boldsymbol{s}^H, \boldsymbol{s}^H) \end{pmatrix}$$ ・・・産業構造の定常推移行列

Q^n　・・・Q の n 回反復

標本経路 $(\boldsymbol{s}^0, \bar{s}_1, \bar{s}_2, \cdots)$ の確率分布は次のようになる。

$$P_s(\boldsymbol{s}_t = \bar{\boldsymbol{s}}_t(t = 0, \cdots, n)) = e_{\boldsymbol{s}^0} \prod_{t=0}^{n-1} Q(\bar{\boldsymbol{s}}_t, \bar{\boldsymbol{s}}_{t+1}) . \tag{25}$$

$e_{\boldsymbol{s}^0}Q^n = [Q^n(\boldsymbol{s}^0, \boldsymbol{s})]_{\boldsymbol{s}\in S}$　・・・初期産業構造が $\boldsymbol{s}^0$のときの第 n 期における産業構造の確率分布（図３）

$\nu = [\nu_{\boldsymbol{s}}]_{\boldsymbol{s} \in S}$　・・・初期産業構造 $\boldsymbol{s}^0$の確率分布（初期分布）

初期分布がνであるとき，マルコフ過程$\{\boldsymbol{s}_t\}_{t=0}^{\infty}$の確率分布は次のようになる。

$$P_\nu(\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{s}_1, \cdots, \boldsymbol{s}_n) = \nu_{\boldsymbol{s}} \prod_{t=0}^{n-1} Q(\boldsymbol{s}_t, \boldsymbol{s}_{t+1}) . \qquad (26)$$

$\mu^{(n+1)} = \mu^{(n)}Q$　・・・今期の産業構造の確率分布と次期の産業構造の確率分布との関係

$\mu^{(n)} = \nu Q^n = [\mu_{\boldsymbol{s}}^{(n)}]_{\boldsymbol{s}\in S}$　・・・初期産業構造の分布がνのときの第 n 期における産業構造の確率分布（図４）

$\mu^* = [\mu_s{}^*]_{\boldsymbol{s} \in S}$　・・・不変確率測度

不変確率測度は次の関係を満たす。

$$\mu^* Q = \mu^*. \qquad (27)$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{s^1}{}^* & \cdots & \mu_{s^H}{}^* \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{s^1}{}^* & \cdots & \mu_{s^H}{}^* \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} Q^n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} Q^n(\boldsymbol{s}^1, \boldsymbol{s}^1) & \cdots & Q^n(\boldsymbol{s}^1, \boldsymbol{s}^H) \\ \vdots & & \vdots \\ Q^n(\boldsymbol{s}^H, \boldsymbol{s}^1) & \cdots & Q^n(\boldsymbol{s}^H, \boldsymbol{s}^H) \end{pmatrix}. \qquad (28)$$

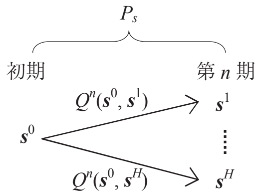

図３　$e_{s^0}Q^n$，$\boldsymbol{P_s}$ **の分布**

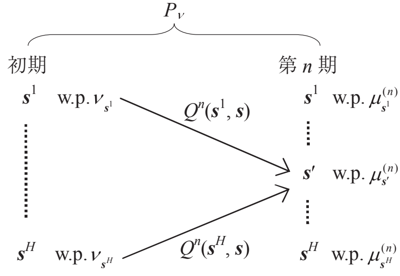

図４　$\boldsymbol{\mu^{(n)}}$，$\boldsymbol{P_\nu}$ **の分布**

５．命題・定理・系・補題の証明

命題１は，仮定Ω，仮定 S，仮定 M を前提としている。

命題１(a)（評価関数と最適政策関数の存在）
任意の$(\omega, \mathbf{s})$について（FE）を解く。このとき，
ｉ）（FE）を満たす一意の $V(\omega, \mathbf{s})$が存在する。V はωの単調増加関数で，一様に有界である。
ⅱ）一意の最適投資政策関数 $x(\omega, s)$が存在して，

$$x(\omega, \mathbf{s}) \le \bar{x}\ ,\quad \forall(\omega, \mathbf{s}) \in \Omega \times S \tag{29}$$

なる $\bar{x}$ が存在する。
ⅲ）最適退出政策関数$\chi(\omega, \mathbf{s})$が存在する。

証明

ｉ）の証明：

$\Sigma = \Omega \times S$ とし，$l_\infty(\Sigma)$をΣ上の一様に有界な関数の空間（＝バナッハ空間）とする。$\boldsymbol{\sigma} = (\omega, \mathbf{s}) \in \Sigma,\ \boldsymbol{\sigma}' = (\omega', \mathbf{s}') \in \Sigma,\ u_\sigma \in l_\infty(\Sigma)$に対して，線形作用素 $T : l_\infty(\Sigma) \to l_\infty(\Sigma)$を，

$$Tu_\sigma = \mathrm{Max}\left\{\underset{x}{\mathrm{Max}}\ \{A_\sigma - c_\sigma x + \beta \sum_{\sigma' \in \Sigma} u_{\sigma'} p(\sigma' \mid \sigma, x)\}, \phi\right\} \tag{30}$$

と定義する。ただし，

$$p(\sigma' \mid \sigma, x) = \sum_{\eta' = -k_2}^{0} q_\omega(\hat{\mathbf{s}}' \mid \mathbf{s}, \eta') p(\omega' \mid \omega, x, \eta') p_{\eta'}\ . \tag{31}$$

$u_\sigma \le v_\sigma,\ \forall\sigma$なる，$u_\sigma, v_\sigma \in l_\infty(\Sigma)$に対して，

$$Tu_\sigma \le Tv_\sigma \text{（単調性）}. \tag{32}$$

定数 a に対して，

$$T(u_\sigma + a) = Tu_\sigma + \beta a \text{（割引）}. \tag{33}$$

が成り立つ。したがって，T はブラックウェルの十分条件を満たすので，T は $l_\infty(\Sigma)$上のモジュール$\beta < 1$の縮小写像である。縮小写像定理より，一意の不動点 $V : \Sigma \to \mathbb{R}$ が存在し，かつ V は一様に有界な関数となる。また，ベルマン方程式

$$TV_\sigma = \mathrm{Max}\left\{\underset{x}{\mathrm{Max}}\,\{A_\sigma - c_\sigma x + \beta \mathrm{E} V_{\sigma'}\}, \phi\right\} \tag{34}$$

について，$TV = V$ を満たす。ただし，E はσ'に関して期待値を取る作用素である。V^n を

$$V^n(\omega, \mathbf{s}) = TV^{n-1}(\omega, \mathbf{s}) = T^n A(\omega, \mathbf{s}) \tag{35}$$

と定義すると，T は縮小写像なので，不動点 V は，

$$V(\omega, \mathbf{s}) = \lim_{n \to \infty} V^n(\omega, \mathbf{s}) \tag{36}$$

より導かれる。

次に, V がωの単調増加関数であることを, 帰納法で証明する。$\omega_1 \geq \omega_2$とする。

（１）$n = 0$のとき

$V^0(\omega, \mathbf{s}) = A(\omega, \mathbf{s})$となり，$A$ のωの非減少関数なので,

$$A(\omega_1, \mathbf{s}) \geq A(\omega_2, \mathbf{s}). \tag{37}$$

（２）ある n について，$V^n(\omega, \mathbf{s})$がωの単調増加関数であると仮定する。$n + 1$について，次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &V^{n+1}(\omega_1, \mathbf{s}) - V^{n+1}(\omega_2, \mathbf{s}) = TV^n(\omega_1, \mathbf{s}) - TV^n(\omega_2, \mathbf{s}) \\ &= A(\omega_1, \mathbf{s}) - c(\omega_1) x^n(\omega_1, \mathbf{s}) + \beta \sum_{\eta' = -k_2}^{0} \sum_{\hat{\mathbf{s}}'_1 \in S} \sum_{\omega' \in \Omega} V^n(\omega', \hat{\mathbf{s}}'_1 + e_{\omega'}) q_{\omega_1}(\hat{\mathbf{s}}'_1 \mid \mathbf{s}, \eta') p(\omega' \mid \omega_1, x^n(\omega_1, \mathbf{s}), \eta') p_{\eta'} \\ &- A(\omega_2, \mathbf{s}) + c(\omega_2) x^n(\omega_2, \mathbf{s}) - \beta \sum_{\eta' = -k_2}^{0} \sum_{\hat{\mathbf{s}}'_2 \in S} \sum_{\omega' \in \Omega} V^n(\omega', \hat{\mathbf{s}}'_2 + e_{\omega'}) q_{\omega_2}(\hat{\mathbf{s}}'_2 \mid \mathbf{s}, \eta') p(\omega' \mid \omega_2, x^n(\omega_2, \mathbf{s}), \eta') p_{\eta'} \cdot \end{aligned} \tag{38}$$

$x^n(\omega_i, \boldsymbol{s})$（$i = 1, 2$）は$\omega = \omega_i$のときの最適投資政策である。また，

$$\hat{\boldsymbol{s}}_i = \boldsymbol{s}_i - e_{\omega_i} \quad (i = 1, 2) \tag{39}$$

である。ここで，$x_2 = x^n(\omega_2, \boldsymbol{s})$として，状態$\omega_1$でも投資水準を$x_2$とする状況を考える。このとき，状態$\omega_1$の価値は $V^n(\omega_1, \boldsymbol{s})$と同じ水準であるか，もしくは低下する。したがって，

$$\begin{aligned}(38)\text{式} \geq\ & A(\omega_1, \boldsymbol{s}) - A(\omega_2, \boldsymbol{s}) - \{c(\omega_1) - c(\omega_2)\}x_2 \\ & + \beta \sum_{\eta'=-k_2}^{0} \sum_{\hat{\boldsymbol{s}}'_1 \in S} \sum_{\omega'_1 \in \Omega} V^n(\omega'_1, \hat{\boldsymbol{s}}'_1 + e_{\omega'_1}) q_{\omega_1}(\hat{\boldsymbol{s}}'_1 \mid \boldsymbol{s}, \eta') p(\omega'_1 \mid \omega_1, x_2, \eta') p_{\eta'} \\ & - \beta \sum_{\eta'=-k_2}^{0} \sum_{\hat{\boldsymbol{s}}'_2 \in S} \sum_{\omega'_2 \in \Omega} V^n(\omega'_2, \hat{\boldsymbol{s}}'_2 + e_{\omega'}) q_{\omega_2}(\hat{\boldsymbol{s}}'_2 \mid \boldsymbol{s}, \eta') p(\omega'_2 \mid \omega_2, x_2, \eta') p_{\eta'} .\end{aligned} \tag{40}$$

$c(\omega)$はωの単調非増加関数であるから，

$$\begin{aligned}(40)\text{式} \geq\ & A(\omega_1, \boldsymbol{s}) - A(\omega_2, \boldsymbol{s}) \\ & + \beta \sum_{\eta'=-k_2}^{0} \sum_{\omega'_1 \in \Omega} p(\omega'_1 \mid \omega_1, x_2, \eta') p_{\eta'} \left\{ \sum_{\hat{\boldsymbol{s}}'_1 \in S} V^n(\omega'_1, \hat{\boldsymbol{s}}'_1 + e_{\omega'_1}) q_{\omega_1}(\hat{\boldsymbol{s}}'_1 \mid \boldsymbol{s}, \eta') \right\} \\ & - \beta \sum_{\eta'=-k_2}^{0} \sum_{\omega'_2 \in \Omega} p(\omega'_2 \mid \omega_2, x_2, \eta') p_{\eta'} \left\{ \sum_{\hat{\boldsymbol{s}}'_2 \in S} V^n(\omega'_2, \hat{\boldsymbol{s}}'_2 + e_{\omega'_2}) q_{\omega_2}(\hat{\boldsymbol{s}}'_2 \mid \boldsymbol{s}, \eta') \right\} .\end{aligned} \tag{41}$$

状態ω_1，状態ω_2ともに現在の産業構造は同じ $\boldsymbol{s}$ である。また，両状態での投資は同じ水準 x_2としているから，次期に実現する $\boldsymbol{s}'$の集合と各 $\boldsymbol{s}'$の発生する確率は同じである。そこで，

$$\bar{\boldsymbol{s}}' = \boldsymbol{s}' - e_{\omega'_1} - e_{\omega'_2} \tag{42}$$

$$\hat{\boldsymbol{s}}'_1 = \bar{\boldsymbol{s}}' + e_{\omega'_2} \tag{43}$$

$$\hat{\boldsymbol{s}}'_2 = \bar{\boldsymbol{s}}' + e_{\omega'_1} \tag{44}$$

と置く。すなわち，状態ω_1, ω_2にいる企業だけ除いた産業構造$\bar{\boldsymbol{s}}$を考える。さらに，q_{ω_1}あるいはq_{ω_2}から導かれる$\bar{\boldsymbol{s}}$に関する周辺確率を，

$$q_{\omega_1\omega_2}(\bar{\boldsymbol{s}}' \mid \boldsymbol{s}, \eta') = \sum_{\omega'_j \in \Omega} q_{\omega_i}(\bar{\boldsymbol{s}}' + e_{\omega'_j} \mid \boldsymbol{s}, \eta') \tag{45}$$

と定める。すると，

$$\sum_{\hat{\mathbf{s}}_1' \in S} V^n(\omega_1', \hat{\mathbf{s}}_1' + e_{\omega_1'}) q_{\omega_1}(\hat{\mathbf{s}}_1' \mid \mathbf{s}, \eta') = \sum_{\bar{\mathbf{s}}' \in S} \sum_{\omega_2' \in \Omega} V^n(\omega_1', \bar{\mathbf{s}}' + e_{\omega_1'} + e_{\omega_2'}) q_{\omega_1 \omega_2}(\bar{\mathbf{s}}' \mid \mathbf{s}, \eta') p(\omega_2' \mid \omega_2, x_2, \eta') \tag{46}$$

$$\sum_{\hat{\mathbf{s}}_2' \in S} V^n(\omega_2', \hat{\mathbf{s}}_2' + e_{\omega_2'}) q_{\omega_2}(\hat{\mathbf{s}}_2' \mid \mathbf{s}, \eta') = \sum_{\bar{\mathbf{s}}' \in S} \sum_{\omega_1' \in \Omega} V^n(\omega_2', \bar{\mathbf{s}}' + e_{\omega_1'} + e_{\omega_2'}) q_{\omega_1 \omega_2}(\bar{\mathbf{s}}' \mid \mathbf{s}, \eta') p(\omega_1' \mid \omega_1, x_2, \eta') \tag{47}$$

となる。このことから，

$$\begin{aligned}
&(41)\text{式} \geq A(\omega_1, \mathbf{s}) - A(\omega_2, \mathbf{s}) \\
&\qquad + \beta \sum_{\eta' = -k_2}^{0} \left\{ \sum_{\bar{\mathbf{s}}' \in S} \sum_{\omega_1' \in \Omega} \sum_{\omega_2' \in \Omega} V^n(\omega_1', \bar{\mathbf{s}}' + e_{\omega_1'} + e_{\omega_2'}) q_{\omega_1 \omega_2}(\bar{\mathbf{s}}' \mid \mathbf{s}, \eta') p(\omega_1' \mid \omega_1, x_1, \eta') p(\omega_2' \mid \omega_2, x_2, \eta') \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{\bar{\mathbf{s}}' \in S} \sum_{\omega_1' \in \Omega} \sum_{\omega_2' \in \Omega} V^n(\omega_2', \bar{\mathbf{s}}' + e_{\omega_1'} + e_{\omega_2'}) q_{\omega_1 \omega_2}(\bar{\mathbf{s}}' \mid \mathbf{s}, \eta') p(\omega_1' \mid \omega_1, x_2, \eta') p(\omega_2' \mid \omega_2, x_2, \eta') \right\} p_{\eta'} \\
&\geq A(\omega_1, \mathbf{s}) - A(\omega_2, \mathbf{s}) \\
&+ \beta \sum_{\eta' = -k_2}^{0} \sum_{\omega_1' \in \Omega} \sum_{\omega_2' \in \Omega} \sum_{\bar{\mathbf{s}}' \in S} \{ V^n(\omega_1', \bar{\mathbf{s}}' + e_{\omega_1'} + e_{\omega_2'}) - V^n(\omega_2', \bar{\mathbf{s}}' + e_{\omega_1'} + e_{\omega_2'}) \} q_{\omega_1 \omega_2}(\bar{\mathbf{s}}' \mid \mathbf{s}, \eta') p(\omega_1' \mid \omega_1, x_2, \eta') p(\omega_2' \mid \omega_2, x_2, \eta') p_{\eta'}
\end{aligned} \tag{48}$$

となる。$A(\omega, \mathbf{s})$はωの単調非減少関数，V^nはωの単調増加関数であるから，

$$V^{n+1}(\omega_1, \mathbf{s}) - V^{n+1}(\omega_2, \mathbf{s}) \geq 0. \tag{49}$$

$n+1$についても成立する。

ⅱ）とⅲ）の証明：

最適政策が存在することを示す。Tの不動点Vは一様に有界なので，

$$\bar{V} = \sup_{\sigma} V_{\sigma} \tag{50}$$

なる$\bar{V}$が存在する。Aはωの非減少関数で，仮定 A-3から$A_{\sigma} \leq \bar{A}$となるので，

$$V_{\sigma} \leq A_{\sigma} + \beta \sup_{\sigma} V_{\sigma} \leq \bar{A} + \beta \bar{V}, \quad \forall \sigma \in \Sigma. \tag{51}$$

任意のσについてこの関係が成立するので，

$$\overline{V} \le \overline{A} + \beta \overline{V} . \tag{52}$$

よって，

$$\overline{V} \le \frac{\overline{A}}{1-\beta} . \tag{53}$$

また $TV = V$ であるから，(34)式より，

$$V_\sigma \ge \phi, \quad \forall \sigma \in \Sigma. \tag{54}$$

ゆえに，

$$\phi \le V_\sigma \le \frac{\overline{A}}{1-\beta}, \quad \forall \sigma \in \Sigma. \tag{55}$$

これより，各σに対して V_σは有界かつ連続であるから，V_σを最大化する最適政策が存在する。

最適投資政策 x_σ*が一様に有界であることを示す。(34)式を x_σ*で評価すると，

$$TV_\sigma = \mathrm{Max}\{A_\sigma - c_\sigma x_\sigma{}^* + \beta \mathrm{E} V_{\sigma'}, \phi\} \tag{56}$$

であることから，$c_\sigma \ge \overline{c}$ と仮定 A-3より，

$$\phi \le A_\sigma - c_\sigma x_\sigma{}^* + \beta \mathrm{E} V_{\sigma'} \le \overline{A} - \overline{c} x_\sigma{}^* + \beta \overline{V} \tag{57}$$

となる。このことから，

$$x_\sigma{}^* \le \frac{\overline{A} + \beta \overline{V} - \phi}{\overline{c}} \equiv \overline{x}, \quad \forall \sigma \in \Sigma. \tag{58}$$

最適投資政策 x_σ*が一意であることを示す。ベルマン方程式の右辺の２階微分は，

$$\beta \sum_{\eta'=-k_2}^{0} \sum_{\hat{\mathbf{s}}' \in S} \sum_{\omega' \in \Omega} V(\omega', \hat{\mathbf{s}}' + e_{\omega'}) \frac{\partial^2 p(\omega' \mid \omega, x, \eta')}{\partial x^2} q_\omega(\hat{\mathbf{s}}' \mid \mathbf{s}, \eta') p_{\eta'} < 0 \tag{59}$$

となり，p は x の凹関数であるから，この式も x の凹関数となる。したがって，最適解は一意に定まる。

証明終

命題１(b)（均衡における企業の最適政策）

・最適投資政策

２つの境界$\underline{\omega}(\boldsymbol{s}),\overline{\omega}(\boldsymbol{s})$が存在して，

$$C_l = \{(\omega,\boldsymbol{s}) \mid \omega \le \underline{\omega}(\boldsymbol{s})\} \tag{60}$$

$$C_u = \{(\omega,\boldsymbol{s}) \mid \omega > \overline{\omega}(\boldsymbol{s})\} \tag{61}$$

$$C = C_l \cup C_u \tag{62}$$

とすると，

$$(\omega, \boldsymbol{s}) \in C \Rightarrow x(\omega, \boldsymbol{s}) = 0. \tag{63}$$

・最適退出政策

境界$\underline{\underline{\omega}}(\boldsymbol{s})$が存在して，

$$L = \{(\omega,\boldsymbol{s}) \mid \omega \le \underline{\underline{\omega}}(\boldsymbol{s})\} \tag{64}$$

とすると，

$$(\omega, \boldsymbol{s}) \in L \Rightarrow \chi(\omega, \boldsymbol{s}) = 0. \tag{65}$$

また，

$$\inf \underline{\underline{\omega}}(\boldsymbol{s}) > -\infty \tag{66}$$

$$\sup \overline{\omega}(\boldsymbol{s}) < \infty . \tag{67}$$

証明

・最適投資政策について

$$G(\omega,\boldsymbol{s}) = \beta \sum_{\eta'=-k_2}^{0} \sum_{\omega' \in \Omega} \sum_{\hat{\boldsymbol{s}}' \in S} V(\omega', \hat{\boldsymbol{s}}' + e_{\omega'}) q_{\omega}(\hat{\boldsymbol{s}}' \mid \boldsymbol{s}, \eta') \frac{\partial p(\omega' \mid \omega, x(\omega,\boldsymbol{s}), \eta')}{\partial x} p_{\eta'} \tag{68}$$

と定義する。１階の条件(12)式より，$x(\omega, s) > 0$ならば，

$$G(\omega, \boldsymbol{s}) > c(\omega) \tag{69}$$

となる。$V \in [0, \overline{V}]$，$\phi > 0$，さらに V はωの単調増加関数なので，

$$\lim_{\omega \to -\infty} V(\omega, \boldsymbol{s}) = \phi \tag{70}$$

$$\lim_{\omega \to \infty} V(\omega, \boldsymbol{s}) = \overline{V} \cdot \tag{71}$$

また，

$$\sum_{\eta'=-k_2}^{0} \frac{\partial p(\omega' \mid \omega, x(\omega, \boldsymbol{s}), \eta')}{\partial x} p_{\eta'} \tag{72}$$

のサポートは$\omega' \in \{\omega - k_2, \cdots, 0, \cdots, \omega + k_1\}$で有限個である。

$$\sum_{\omega' \in \Omega} \sum_{\eta'=-k_2}^{0} p(\omega' \mid \omega, x(\omega, \boldsymbol{s}), \eta') p_{\eta'} = 1 \tag{73}$$

より，

$$\sum_{\omega' \in \Omega} \sum_{\eta'=-k_2}^{0} \frac{\partial p(\omega' \mid \omega, x(\omega, \boldsymbol{s}), \eta')}{\partial x} p_{\eta'} = 0 \tag{74}$$

であるから，

$$\mathrm{Max}\left\{ \sum_{\eta'=-k_2}^{0} \frac{\partial p(\omega - k_1 \mid \omega, x(\omega, \boldsymbol{s}), \eta')}{\partial x} p_{\eta'}, \cdots, \sum_{\eta'=-k_2}^{0} \frac{\partial p(\omega + k_1 \mid \omega, x(\omega, \boldsymbol{s}), \eta')}{\partial x} p_{\eta'} \right\} \tag{75}$$

を達成する$\omega' \in \{\omega - k_2, \cdots, 0, \cdots, \omega + k_1\}$が存在する。そこで，

$$\overline{p} = \underset{\omega'}{\mathrm{Max}} \sum_{\eta'=-k_2}^{0} \frac{\partial p(\omega' \mid \omega, x(\omega, \boldsymbol{s}), \eta')}{\partial x} p_{\eta'} \tag{76}$$

とすると，

$$\begin{aligned} G(\omega, \boldsymbol{s}) &< \overline{p} \sum_{\hat{\boldsymbol{s}}' \in S} \{V(\omega + k_1, \hat{\boldsymbol{s}}' + e_{\omega + k_1}) - V(\omega - k_2, \hat{\boldsymbol{s}}' + e_{\omega - k_2})\} q_{\omega}(\hat{\boldsymbol{s}}' \mid \boldsymbol{s}, \eta') \\ &= \overline{p} \varepsilon_{\omega} \to +0 \quad (\omega \to \pm\infty) \end{aligned} \tag{77}$$

となる。第１式は図５を参照。第２式は(70), (71)式より導かれる。

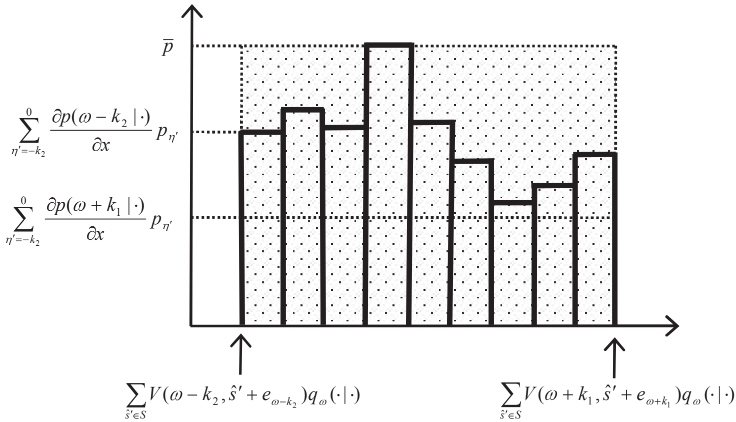

図５　ヒストグラムの面積が $G(\omega, s)$，点々の領域の面積が(77)式の右辺

以上の議論から，

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} G(\omega, \mathbf{s}) = 0 \tag{78}$$

となる。したがって，$x(\omega, \mathbf{s}) > 0$が最適となる$\omega$の最大値・最小値が存在する。それぞれを，

$$\underline{\omega}(\mathbf{s}) = \min\{\omega \mid G(\omega, \mathbf{s}) > c(\omega)\} \tag{79}$$

$$\overline{\omega}(\mathbf{s}) = \mathrm{Max}\{\omega \mid G(\omega, \mathbf{s}) > c(\omega)\} \tag{80}$$

と定義する。$\underline{\omega}(\mathbf{s}), \overline{\omega}(\mathbf{s})$ は有限である。さもないと，すべてのωで $x(\omega, \mathbf{s}) > 0$となり，$V$ は有界ではなくなり，(70), (71)式を満たさなくなる。

・最適退出政策について

$$V(\omega, \mathbf{s}) = \phi, \quad \forall\, \omega \le \underline{\underline{\omega}}(\mathbf{s}) \tag{81}$$

なる $\underline{\underline{\omega}}(s) > -\infty$ が存在することを示す。$x(\omega, \mathbf{s}) = 0$のとき，次期の状態は$\omega' = \omega$となる。ベルマン方程式は，次式で与えられる。

$$V(\omega,\mathbf{s}) = A(\omega,\mathbf{s}) + \beta \sum_{\eta=-k_2}^{0} \sum_{\hat{\mathbf{s}}' \in S} V(\omega, \hat{\mathbf{s}}' + e_\omega) q_\omega (\hat{\mathbf{s}}' \mid \mathbf{s}, \eta) p_\eta \cdot \tag{82}$$

ω, ηを所与として，$q_\omega(\mathbf{s}' - e_\omega| \mathbf{s}, \eta) = q_{\omega\eta}(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$と書き換える。産業構造の推移確率行列を，

$$Q_{\omega\eta} = \begin{pmatrix} q_{\omega\eta}(\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^1) & \cdots & q_{\omega\eta}(\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^H) \\ \vdots & & \vdots \\ q_{\omega\eta}(\mathbf{s}, \mathbf{s}^1) & \cdots & q_{\omega\eta}(\mathbf{s}, \mathbf{s}^H) \\ \vdots & & \vdots \\ q_{\omega\eta}(\mathbf{s}^H, \mathbf{s}^1) & \cdots & q_{\omega\eta}(\mathbf{s}^H, \mathbf{s}^H) \end{pmatrix} \tag{83}$$

とする。$Q_{\omega\eta}(\mathbf{s}, \cdot)$を $Q_{\omega\eta}$の第 s 行

$$Q_{\omega\eta}(\mathbf{s}, \cdot) = (q_{\omega\eta}(\mathbf{s}, \mathbf{s}^1), \cdots, q_{\omega\eta}(\mathbf{s}, \mathbf{s}^H)). \tag{84}$$

とし，また，

$$\boldsymbol{V}_{\omega+\eta} = \begin{pmatrix} V(\omega+\eta, \mathbf{s}^1) \\ \vdots \\ V(\omega+\eta, \mathbf{s}^H) \end{pmatrix} \tag{85}$$

とする。そうすると，

$$Q_{\omega\eta}(\mathbf{s},\cdot)\boldsymbol{V}_{\omega+\eta} = \sum_{\mathbf{s}' \in S} V(\omega+\eta, \mathbf{s}') q_{\omega\eta}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \cdot \tag{86}$$

これより(82)式は，

$$V(\omega,\mathbf{s}) = A(\omega,\mathbf{s}) + \beta\left(1 - \sum_{\eta=-k_2}^{-1} p_\eta\right) Q_{\omega 0}(\mathbf{s},\cdot)\boldsymbol{V}_\omega + \beta \sum_{\eta=-k_2}^{-1} p_\eta Q_{\omega\eta}(\mathbf{s},\cdot)\boldsymbol{V}_{\omega+\eta} \tag{87}$$

と書き換えられる。ここで，

$$\hat{\omega}(\mathbf{s}) = \min\{\omega \mid A(\omega,\mathbf{s}) \geq (1-\beta)\phi\} \tag{88}$$

$$\omega^* = \underset{\omega}{\mathrm{Max}}\{\omega < \hat{\omega}(\mathbf{s}) \mid x(\omega,\mathbf{s}) = 0\} \tag{89}$$

と定義する。(87)式が成立するのは，$\omega \leq \omega^*$のときである。(84)式を全ての $\mathbf{s} \in S$ について書き出すことで，次式を得る。

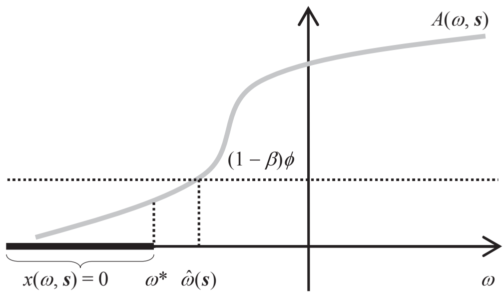

図６　$\hat{\omega}(\boldsymbol{s})$ と $\boldsymbol{\omega^*}$

$$\boldsymbol{V}_\omega = \boldsymbol{A}_\omega + \beta Q_{\omega 0}\boldsymbol{V}_\omega - \beta \sum_{\eta=-k_2}^{-1} p_\eta \Delta_\eta (Q_\omega \boldsymbol{V}_\omega) \cdot \tag{90}$$

ここで，

$$\boldsymbol{A}_\omega = \begin{pmatrix} A(\omega, \boldsymbol{s}^1) \\ \vdots \\ A(\omega, \boldsymbol{s}^H) \end{pmatrix} \tag{91}$$

$$\Delta_\eta(Q_\omega \boldsymbol{V}_\omega) = Q_\omega \boldsymbol{V}_\omega - Q_{\omega\eta}\boldsymbol{V}_{\omega+\eta} \geq \boldsymbol{o}. \tag{92}$$

(90)式は次のように書ける。

$$(I - \beta Q_{\omega 0})\boldsymbol{V}_\omega = \boldsymbol{A}_\omega - \beta \sum_{\eta=-k_2}^{-1} p_\eta \Delta_\eta (Q_\omega \boldsymbol{V}_\omega) \cdot \tag{93}$$

$Q_{\omega 0}e = 1 \cdot e$ より，1は $Q_{\omega 0}$の固有値となる。したがって，$\left|I - Q_{\omega 0}\right| = 0$ となる。$Q_{\omega 0}$は確率行列なので，ペロン＝フロベニウスの定理より，$Q_{\omega 0}$の固有値はすべて正で，最大の固有値は 1 となる。$\beta^{-1} > 1$，かつ $Q_{\omega 0}$は1より大きい固有値を持たないことから，$\left|\beta^{-1}I - Q_{\omega 0}\right| \neq 0$。つまり，$\left|I - \beta Q_{\omega 0}\right| \neq 0$ となり，$I - \beta Q_{\omega 0}$は逆行列を持つ。(93)式は次のようになる。

$$\boldsymbol{V}_\omega = (I - \beta Q_{\omega 0})^{-1}\boldsymbol{A}_\omega - \beta (I - \beta Q_{\omega 0})^{-1} \sum_{\eta=-k_2}^{-1} p_\eta \Delta_\eta (Q_\omega \boldsymbol{V}_\omega). \tag{94}$$

$\boldsymbol{V}_\omega \geq \boldsymbol{\phi}$なので，

$$\boldsymbol{\phi} \leq (I - \beta Q_{\omega 0})^{-1} \boldsymbol{A}_\omega - \beta (I - \beta Q_{\omega 0})^{-1} \sum_{\eta=-k_2}^{-1} p_\eta \Delta_\eta (Q_\omega \boldsymbol{V}_\omega) . \tag{95}$$

ただし，

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi \\ \vdots \\ \phi \end{pmatrix} . \tag{96}$$

$\omega \leq \omega^*$より，$\boldsymbol{A}_\omega < (1 - \beta)\boldsymbol{\phi}$となるので，

$$\boldsymbol{\phi} \leq (I - \beta Q_{\omega 0})^{-1} (1 - \beta) \boldsymbol{\phi} - \beta (I - \beta Q_{\omega 0})^{-1} \sum_{\eta=-k_2}^{-1} p_\eta \Delta_\eta (Q_\omega \boldsymbol{V}_\omega) . \tag{97}$$

ここで，$Q_{\omega 0}\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}$なので，

$$(I - \beta Q_{\omega 0})\boldsymbol{\phi} = (1 - \beta)\boldsymbol{\phi}. \tag{98}$$

すなわち，

$$(I - \beta Q_{\omega 0})^{-1}\boldsymbol{\phi} = (1 - \beta)^{-1}\boldsymbol{\phi}. \tag{99}$$

$Q_{\omega 0}$の固有値を$\lambda \in (0, 1]$，固有ベクトルを $\boldsymbol{y}$ とすると，$(I - \beta Q_{\omega 0})\boldsymbol{y} = (1 - \beta\lambda)\boldsymbol{y}$ となり，$(I - \beta Q_{\omega 0})$の固有値は$(1 - \beta\lambda) \in (0, 1]$である。したがって，$(I - \beta Q_{\omega 0})$は正値定符号行列となり，$(I - \beta Q_{\omega 0})$ の主座小行列式はすべて正となる。これは，$\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{o}$ に対して，$(I - \beta Q_{\omega 0})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と置いたときに，$(I - \beta Q_{\omega 0})$についてホーキンス＝サイモンの条件が成り立つことを意味するので，$\boldsymbol{x} = (I - \beta Q_{\omega 0})^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{o}$ となる。すなわち，

$$(I - \beta Q_{\omega 0})^{-1} \sum_{\eta=-k_2}^{-1} p_\eta \Delta_\eta (Q_\omega \boldsymbol{V}_\omega) \geq \boldsymbol{o} . \tag{100}$$

このことから，(97)式は次のようになる。

$$\boldsymbol{\phi} \leq \boldsymbol{V}_\omega = \boldsymbol{\phi} - (I - \beta Q_{\omega 0})^{-1} \beta \sum_{\eta=-k_2}^{0} p_\eta \Delta_\eta (Q_\omega \boldsymbol{V}_\omega) \leq \boldsymbol{\phi} . \tag{101}$$

すなわち，

$$\boldsymbol{V}_{\omega} = \boldsymbol{\phi}, \quad \forall \omega \leq \omega^*. \tag{102}$$

したがって,

$$\underline{\underline{\omega}}(\boldsymbol{s}) = \mathrm{Max}\{\omega \mid V(\omega, \boldsymbol{s}) = \phi\} \tag{103}$$

なる $\underline{\underline{\omega}}(\boldsymbol{s})$ が存在する。

証明終

命題 1 (c)（退出時間の性質）

最適政策 $\{x(\omega, \boldsymbol{s}), \chi(\omega, \boldsymbol{s})\}$ によって導かれる状態の経路を $\{(\omega_t, \boldsymbol{s}_t)\}_{t=0}^{\infty}$ とする。初期状態 $(\omega_0, \boldsymbol{s}_0)$ として，初めて $\chi(\omega_t, \boldsymbol{s}_t) = 0$ となる t を退出時間とする。退出時間は確率変数であり,

$$T(\omega_0, \boldsymbol{s}_0) = \inf\{t \mid (\omega_t, \boldsymbol{s}_t) \in L\} \tag{104}$$

と定義される。

$T(\omega_0, \boldsymbol{s}_0) < \infty$ a.s.であり，$T(\omega_0, \boldsymbol{s}_0)$ は ω_0 について確率優越する[6)]。

証明

・$T(\omega_0, \boldsymbol{s}_0)$ はほとんど確実（a.s.）に有限となることの証明

$(\omega, \boldsymbol{s}) \notin L$ なる $(\omega, \boldsymbol{s})$ はすべて一時的状態

$(\omega, \boldsymbol{s}) \in L$ なる $(\omega, \boldsymbol{s})$ はすべて再帰的状態[7)]

を示せばよい。状態 j から出発して, n 期後に初めて集合 A に到達する確率を $f_{jA}^{(n)}$ とする。任意の期で集合 A に到達する確率 F_{jA} は,

---

6)　2 つの初期状態 ω_1, ω_2 かつ $\omega_2 > \omega_1$ に対して，$\Pr(\omega_t \leq \underline{\underline{\omega}} \mid \omega_2) < \Pr(\omega_t \leq \underline{\underline{\omega}} \mid \omega_1)$ となる。したがって，ω_1 より ω_2 の方が L に到達する確率が低くなるので，$T(\omega_2, \boldsymbol{s}_0) > T(\omega_1, \boldsymbol{s}_0)$ となる。

7)　状態 j が一時的状態であるとき，状態 j から出発して，有限期間内では再び状態 j に戻ることはない。状態 j が再帰的状態であるとき，状態 j から出発して，有限期間内に確実に状態 j に戻る。

$$F_{jA}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{jA}^{(n)}\,. \tag{105}$$

状態 j は，$F_{jj}=1$のときに再帰的，$F_{jj}<1$のときに一時的となる。

$j=(\omega,\boldsymbol{s})\in L$ から出発するとき，企業は退出しているので，$(\omega_t,\boldsymbol{s}_t)\in L$，$(\omega_\tau,\boldsymbol{s}_\tau)\notin L$ について，$\tau>t$ となることはあり得ない。したがって，$(\omega,\boldsymbol{s})\in L$ は吸収状態となるので，$F_{jj}=1$である。

$j=(\omega,\boldsymbol{s})\notin L$ とする。状態ω から状態$\omega+\eta$（$\eta=-k_2,\cdots,-1$）へ，正の確率で有限期間内に減少しながら到達する。また，$\omega^*>-\infty$である。ゆえに，$(\omega,\boldsymbol{s})\in L$ に到達する確率は正である。つまり，$F_{jL}>0$。状態 j から出発して任意の期に到達する状態は，状態 $i\in L$ か，状態 j 以外の状態 $i\notin L$ か，あるいは状態 $j\notin L$ 自身であるから，

$$F_{jj}\le 1-F_{jL}=1-\sum_{n=1}^{\infty}f_{jL}^{(n)}<1\,. \tag{106}$$

・$T(\omega_0,\boldsymbol{s}_0)$は$\omega_0$について確率優越することの証明

２つの初期状態$(\omega_1,\boldsymbol{s}_0)$, $(\omega_2,\boldsymbol{s}_0)$, $\omega_2>\omega_1$を考える。測度空間$(U,\mathscr{U},P)$において，初期状態がω_i（$i=1,2$）のとき，$u\in U$ に対して発生する標本経路を $\{\omega_t^i(u)\}_{t=0}$ とする。各 $u\in U$ に対してカップリング時間

$$\tau(u)=\min\{t\mid\omega_t^1(u)=\omega_t^2(u)\} \tag{107}$$

とする。ω_t^1,ω_t^2 をカップリングした標本経路$\{\omega_t{}^*\}_{t=0}$を次のように定める。

$$\omega_t{}^*=\begin{cases}\omega_t^2(u)\text{（}\omega_t^2(u)-\omega_t^1(u)>0,\forall t\ge\tau(u)\text{のとき）}\\ \omega_t^1(u)\text{（それ以外）}.\end{cases} \tag{108}$$

$\omega_t{}^*$は$\omega_0{}^*=\omega_2$（$>\omega_1$）から出発し，カップリング時間より前には$\omega_t^2(u)$に従って動く。$\omega_t^1=\omega_t^2$ となると，これより先は$\omega_t^2(u)>\omega_t^1(u)$ である限りは$\omega_t^2(u)$ に従って動く。次の性質が導かれる。

性質（１）確率列$(\omega_t{}^*,\boldsymbol{s}_t)\ge(\omega_t^1,\boldsymbol{s}_t)$　w.p. 1

性質（１），および $V(\omega,s)$がωの単調増加関数であること，さらに $T(\omega_0,\boldsymbol{s}_0)=$

$\inf\{t|\ V(\omega_t, \boldsymbol{s}_t) = \phi\}$より,

$$T(\omega_t{*}, \boldsymbol{s}_t) \geq T(\omega_t^1, \boldsymbol{s}_t) \quad \text{a.s.} \tag{109}$$

列$(\omega_t^i, \boldsymbol{s}_t)$とカップリング時間$\tau(u)$はともにマルコフ過程なので, 次の性質が導かれる。

性質（２）$(\omega_t{*}, \boldsymbol{s}_t)$の確率分布と$(\omega_t^2, \boldsymbol{s}_t)$の確率分布は同じである
性質（２）と連続写像定理[8)]より，$T(\omega_t^2, \boldsymbol{s}_t)$の確率分布は$T(\omega_t{*}, \boldsymbol{s}_t)$の確率分布と同じである。(109)式より，$T(\omega_t{*}, \boldsymbol{s}_t)$は$T(\omega_t^1, \boldsymbol{s}_t)$を確率支配するので,

$$T(\omega_t^2, \boldsymbol{s}_t) \geq T(\omega_t^1, \boldsymbol{s}_t) \quad \text{a.s.} \tag{110}$$

証明終

命題２（状態ωにいる既存企業の数が増えると，評価関数は退出価値に近づく）
状態ωにいる企業の数が増加していく産業構造列$\{\boldsymbol{s}_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$を，次のように定める。

$$\boldsymbol{s}_n(\omega) = \boldsymbol{s} + ne_\omega . \tag{111}$$

このとき,

$$\lim_{n\to\infty} V(\omega, \boldsymbol{s}_n(\omega)) = \phi \cdot \tag{112}$$

証明

任意の$\varepsilon > 0$に対しn_εが存在して,

$$V(\omega, \boldsymbol{s}_n(\omega)) < \phi + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon. \tag{113}$$

これを示せばよい。$\boldsymbol{s}_n = \boldsymbol{s}_n(\omega_0)$とする。最適政策$\{x{*}, \chi{*}\}$の下で，状態$(\omega_0, \boldsymbol{s}_n)$から出発して，$t$ 期後に状態$(\omega, \boldsymbol{s})$に到達する確率を$P^t_{(\omega_0, \boldsymbol{s}_n)}((\omega, \boldsymbol{s}) \mid \{x{*}, \chi{*}\})$とする。$L$

---

8)　$X_n \to X$となる確率変数に対して, 連続写像fは$f(X_n) \to f(X)$となる。これは法則収束, 概収束，確率収束どれについても成り立つ。

の指示関数を $I_L(\cdot)$とする。つまり，

$$I_L(\omega, \boldsymbol{s}) = \begin{cases} 1 \ （(\omega, \boldsymbol{s}) \in L \text{ のとき}） \\ 0 \ （(\omega, \boldsymbol{s}) \notin L \text{ のとき}）. \end{cases} \tag{114}$$

評価関数は,

$$V(\omega_0, \boldsymbol{s}_n) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sum_{\omega=0}^{K} \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \{R(\omega, \boldsymbol{s}; x(\omega, \boldsymbol{s}))(1 - I_L(\omega, \boldsymbol{s})) + \phi I_L(\omega, \boldsymbol{s})\} P^t_{(\omega_0, \boldsymbol{s}_n)}((\omega, \boldsymbol{s}) \mid \{x^*, \chi^*\}) \tag{115}$$

と書ける。これより,

$$\phi \le V(\omega_0, \boldsymbol{s}_n) \le \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sum_{\omega=0}^{K} \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \{A(\omega, \boldsymbol{s})(1 - I_L(\omega, \boldsymbol{s})) + \phi I_L(\omega, \boldsymbol{s})\} P^t_{(\omega_0, \boldsymbol{s}_n)}((\omega, \boldsymbol{s}) \mid \{x^*, \chi^*\})$$

$$\le \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sum_{\omega=0}^{K} \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \mathrm{Max}\{A(\omega, \boldsymbol{s}), (1-\beta)\phi\} P^t_{(\omega_0, \boldsymbol{s}_n)}((\omega, \boldsymbol{s}) \mid \{x^*, \chi^*\}). \tag{116}$$

ある企業について，$(\omega_0,\ \boldsymbol{s}_n)$から出発し，その後の t 期間で実現した状態の列が a_t であり，第 t 期には$\omega_t \ge \omega$となる確率を $P_\omega(\boldsymbol{s}_n, t, a_t)$と表す。$\omega$以上の状態にある企業数が少なくとも k となる産業構造 $\boldsymbol{s} \in \hat{S}_k(\omega)$ の範囲で $A(\omega, \boldsymbol{s})$の上限を取り，この値を $A_\omega(k)$とする。つまり，

$$A_\omega(k) = \sup_{\boldsymbol{s} \in \hat{S}_k(\omega)} A(\omega, \boldsymbol{s}). \tag{117}$$

仮定 A-5より，

$$A_\omega(k) = (1-\beta)\phi + o\left(\frac{1}{k}\right) \tag{118}$$

となる。初期状態ω_0にいた n 企業のうち，第 t 期では少なくとも 1 企業だけは$\omega_t \ge \omega$となっているとする。その確率は $P_\omega(\boldsymbol{s}_n, t, a_t)$である。ここで，残りの $n-1$ 企業の状態について考える。第 t 期において，ω以上の状態にある企業数がちょうど k となる産業構造が生じる確率を求める。これは，$n-1$企業のうち，k 企業が第 t 期までに$\omega_t \ge \omega$となっており，$n-k-1$企業が第 t 期までに$\omega_t \ge \omega$とならないという確率である。さらにこの k 企業の組み合わせを考える。求める確率は２項確率

$${}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\{P_\omega(\boldsymbol{s}_n, t, a_t)\}^k\{1 - P_\omega(\boldsymbol{s}_n, t, a_t)\}^{n-k-1} \tag{119}$$

となる。第 t 期に少なくとも 1 企業が$\omega_t \geq \omega$となるような産業構造の範囲で，$A(\omega, s)$の上限を取るとき，その期待値は，

$$P_\omega(\boldsymbol{s}_n, t, a_t)\sum_{k=0}^{n-1} A_\omega(k+1)_{n-1}\mathrm{C}_k\{P_\omega(\boldsymbol{s}_n, t, a_t)\}^k\{1-P_\omega(\boldsymbol{s}_n, t, a_t)\}^{n-k-1} \tag{120}$$

となる。以上の準備より，ω_0から出発する n 企業について，次式が成立する。

$$\begin{aligned}
\phi &\leq V(\omega_0, \boldsymbol{s}_n)\\
&\leq \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left(\sum_{\omega\in\Omega}\sum_{\boldsymbol{s}}\mathrm{Max}\{A(\omega,\boldsymbol{s}),(1-\beta)\phi\}P^t_{(\omega_0,\boldsymbol{s}_n)}((\omega,\boldsymbol{s})\mid\{x^*,\chi^*\})\right)\\
&\leq \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left(\sum_{a_t}\sum_{\omega\in\Omega}P_\omega(\boldsymbol{s}_n,t,a_t)\sum_{k=0}^{n-1}A_\omega(k+1)_{n-1}\mathrm{C}_k\{P_\omega(\boldsymbol{s}_n,t,a_t)\}^k\{1-P_\omega(\boldsymbol{s}_n,t,a_t)\}^{n-k-1}P(a_t)\right).
\end{aligned} \tag{121}$$

ただし，$P(a_t)$は a_t が生じる確率である。ここで，

$$f(n,t)=\sum_{a_t}\sum_{\omega\in\Omega}P_\omega(\boldsymbol{s}_n,t,a_t)\sum_{k=0}^{n-1}A(k+1)_{n-1}\mathrm{C}_k\{P_\omega(\boldsymbol{s}_n,t,a_t)\}^k\{1-P_\omega(\boldsymbol{s}_n,t,a_t)\}^{n-k-1}P(a_t) \tag{122}$$

とおくと，(121)式は次のようになる。

$$\phi \leq \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t f(n,t)\,. \tag{123}$$

仮定 A-3，および，

$$\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k\{P_\omega(s_n,t,a_t)\}^{k+1}\{1-P_\omega(s_n,t,a_t)\}^{n-k-1}=1 \tag{124}$$

$$\sum_{a_t}P(a_t)=1 \tag{125}$$

より，

$$f(n,t)\leq\overline{A} \tag{126}$$

となる。したがって，

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t f(n,t)=\frac{\overline{A}}{1-\beta}<\infty\,. \tag{127}$$

これにより，和に関するルベーグ優収束定理

$$\lim_{n\to\infty}\sum_t \beta^t f(n,t)=\sum_t \beta^t \lim_{n\to\infty} f(n,t) \tag{128}$$

が適用できる。

(118)式より，

$$(121)\text{式}\le\phi+\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left(\sum_{a_t}\sum_{\omega\in\Omega}P_\omega(\boldsymbol{s}_n,t,a_t)\sum_{k=0}^{n-1}o\left(\frac{1}{k+1}\right)_{n-1}\mathrm{C}_k\{P_\omega(\boldsymbol{s}_n,t,a_t)\}^k\{1-P_\omega(\boldsymbol{s}_n,t,a_t)\}^{n-k-1}P(a_t)\right). \tag{129}$$

優収束定理より，(123)式の右辺が収束するためには,

$$\lim_{n\to\infty} f(n,t)=0 \tag{130}$$

となればよく，これを示せば(113)式を証明したことになる。それには,

$$P_\omega(\boldsymbol{s}_n,t,a_t)\sum_{k=0}^{n-1}o\left(\frac{1}{k+1}\right)_{n-1}\mathrm{C}_k\{P_\omega(\boldsymbol{s}_n,t,a_t)\}^k\{1-P_\omega(\boldsymbol{s}_n,t,a_t)\}^{n-k-1}P(a_t)\xrightarrow{\text{a.e.}}0 \tag{131}$$

となることを示せばよい。ここで,

$$\frac{k+1}{n-1}=\arg\operatorname*{Max}_{p}\ p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} \tag{132}$$

であり，なおかつ $N\le n-1$ に対して,

$$\sum_{k=N}^{n-1}o\left(\frac{1}{k+1}\right)_{n-1}\mathrm{C}_k\{P_\omega(\boldsymbol{s}_n,t,a_t)\}^{k+1}\{1-P_\omega(\boldsymbol{s}_n,t,a_t)\}^{n-k-1}\le\sum_{k=N}^{n-1}o\left(\frac{1}{k+1}\right)=o\left(\frac{1}{N+1}\right) \tag{133}$$

であることから，$\theta\ge o\left(\dfrac{1}{n}\right)$，$\forall n\ge 0$ とすると，(131)式は,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}o\left(\frac{1}{k+1}\right)_{n-1}\mathrm{C}_k\{P_\omega(\boldsymbol{s}_n,t,a_t)\}^{k+1}\{1-P_\omega(\boldsymbol{s}_n,t,a_t)\}^{n-k-1}\\
&\le\theta\sum_{k=0}^{N-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k\left(\frac{k+1}{n-1}\right)^{k+1}\left(1-\frac{k+1}{n-1}\right)^{n-k-1}+o\left(\frac{1}{N+1}\right)\\
&=\theta\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(n-1)\cdots(n-k)}{k!}\left(\frac{k+1}{n-1}\right)^{k+1}\left(\frac{n-k-2}{n-1}\right)^{n-k-1}+o\left(\frac{1}{N+1}\right)\\
&=\theta\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(n-1)\cdots(n-k)(n-k-2)^{n-k-1}}{(n-1)^n}\frac{(k+1)^{k+1}}{k!}+o\left(\frac{1}{N+1}\right).
\end{aligned} \tag{134}$$

ここで,

$$\frac{(n-1)\cdots(n-k)(n-k-2)^{n-k-1}}{(n-1)^n} \le \frac{(n-1)^k(n-k-2)^{n-k-1}}{(n-1)^n}$$

$$\le \frac{(n-1)^k(n-1)^{n-k-1}}{(n-1)^n} = \frac{1}{n-1} \tag{135}$$

であるから,

$$(134)\text{式} \le \theta\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(k+1)^{k+1}}{k!}\frac{1}{n-1} + o\left(\frac{1}{N+1}\right). \tag{136}$$

εを固定して,

$$o\left(\frac{1}{n+1}\right) \le \frac{\varepsilon}{2} \tag{137}$$

となる最小の n を n_1とする。また,

$$\theta\sum_{k=0}^{n_1-1}\frac{(k+1)^{k+1}}{k!}\frac{1}{n-1} \le \frac{\varepsilon}{2} \tag{138}$$

となる最小の $n \ge n_1 - 1$を n_2とする。すると,

$$(136)\text{式} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad n \ge n_2. \tag{139}$$

これより(131)式が示された。これより,

$$V(\omega_0, \mathbf{s}_n) \le \phi + \varepsilon, \quad n \ge n_2 \tag{140}$$

となる。n_2はεに依存する値である。

証明終

系 1（参入企業数には上限がある）

$$V^e(\mathbf{s}, m) \le x_m^e, \quad \forall m \ge M \tag{141}$$

なる M が存在する。

証明

$$V^e(\mathbf{s},m)<\varepsilon\leq x_M^e\ ,\ \ \forall m\geq M \tag{142}$$

なる M が存在することを示す。

（１）$\Omega^e=\{\omega^0-k_2,\cdots,\omega^0\}$とすると

状態$\omega^0+\eta$（$\eta=-k_2,\cdots,0$）で参入が起こるとき，

$$V^e(\mathbf{s},m)=\beta\sum_{\eta=-k_2}^{0}\left(\sum_{\mathbf{s}'\in S}V(\omega^0+\eta,\mathbf{s}'+me_{\omega^0+\eta})q^0(\mathbf{s}'\mid\mathbf{s},\eta)\right)p_\eta\ . \tag{143}$$

命題２より，$\eta=-k_2,\cdots,0$と各 $\mathbf{s}\in S$ に対して，

$$V(\omega^0+\eta,\mathbf{s}'+me_{\omega^0+\eta})\leq\phi+\varepsilon\ ,\ \ m\geq M. \tag{144}$$

なる M が存在する。これより(142)式が言える。

（２）一般の有限集合Ω^e について

参入後の状態の分布は$\pi^e(\omega-\eta)$，$\omega\in\Omega^e$ である。いま，参入企業数 m が有界ではないとする。$\pi^e(\omega-\eta)>0$，$\forall\omega\in\Omega^e$ なので，各$\omega\in\Omega^e$ で非有界の企業数が参入することになる。しかし，命題２より，既存企業の数がある水準を超えると，

$$V(\omega,\mathbf{s}+ne_\omega)\leq\phi+\varepsilon,\ \ \forall\omega\in\Omega^e \tag{145}$$

となるので，参入企業数が非有界であることと矛盾する。

証明終

補題１（状態ωにいる企業数が N_ωを超えると，退出することが最適となる）

各ωに対して，

$$V(\omega,\mathbf{s}+ne_\omega)=\phi,\ \ \forall n\geq N_\omega \tag{146}$$

となる N_ωが存在する。

証明

命題２より，n_ωが存在し，$n \geq n_\omega$なる n に対して，

$$V(\omega, \mathbf{s} + ne_\omega) < \phi + \varepsilon \tag{147}$$

となることは示された。ここでは，継続価値を，

$$V^c(\omega,\mathbf{s}) = \sup\left\{R(\omega,\mathbf{s};x) + \beta\sum_{\eta'=-k_2}^{0}\sum_{\mathbf{s}'\in S}\sum_{\omega'\in\Omega}V(\omega',\mathbf{s}')p(\omega'\mid\omega,x,\eta')q_\omega(\hat{\mathbf{s}}'\mid\mathbf{s},\eta')p_{\eta'}\right\} \tag{148}$$

としたとき，　n をさらに大きくすると，

$$V^c(\omega, \mathbf{s} + ne_\omega) \leq \phi \tag{149}$$

となることを示せば，補題１が証明されたことになる。

（１）$x(\omega, \mathbf{s}) = 0$のとき

確実に$\omega' = \omega$となるので，継続価値は $V^c(\omega, \mathbf{s} + ne_\omega)$である。したがって，

$$V^c(\omega, \mathbf{s} + ne_\omega) \leq A(\omega, \mathbf{s} + ne_\omega) + \beta V(\omega, \mathbf{s} + ne_\omega) \tag{150}$$

となり，仮定 A-5より，

$$A(\omega, \mathbf{s} + n_\omega{*}e_\omega) < (1 - \beta)\phi - \varepsilon \tag{151}$$

なる n_ω*が存在する。ゆえに，(147)式と(150)式より，$n \geq \min\{n_\omega, n_\omega{*}\}$に対して，

$$V^c(\omega, \mathbf{s} + ne_\omega) < (1 - \beta)\phi - \varepsilon + \beta(\phi + \varepsilon) < \phi. \tag{152}$$

（２）$x(\omega, s) > 0$のとき

正の確率で$\omega' \in \{\omega - k_2, \cdots, \omega + k_1\}$となる。命題２より，

$$V(\omega + k_1, \mathbf{s} + ne_{\omega+k_1}) \leq \phi + \varepsilon\,,\quad n \geq n_{\omega+k_1} \tag{153}$$

なる $n_{\omega+k_1}$ を考えることができる。今期の産業構造 $\mathbf{s} + n{*}e_\omega$に対して，次期の状態が$\omega' = \omega + k_1$となる企業数が少なくとも $n_{\omega+k_1}$ いる確率は$1 - \varepsilon_1$となる。そのような n*が存在する。このとき，(153)式と V がωの単調増加関数であることから，

$V(\omega', \mathbf{s}') \le \phi + \varepsilon,\ \forall \omega'$となる。逆に，確率$\varepsilon_1$でこのような企業は$n_{\omega+k_1}$未満であり，$V(\omega', \mathbf{s}') > \phi + \varepsilon$となる。したがって，

$$\overline{V} = \sup_{\Sigma} V(\omega, \mathbf{s}) \tag{154}$$

として，上で述べたn^*を考えると，

$$V^c(\omega, \mathbf{s} + n^* e_\omega) \le A(\omega, \mathbf{s} + n^* e_\omega) + \beta(1-\varepsilon_1)(\phi+\varepsilon) + \beta\varepsilon\overline{V}\ . \tag{155}$$

（１）と同様の議論で，

$$A(\omega, \mathbf{s} + n^* e_\omega) < (1-\beta)\phi - \varepsilon,\quad n^* \ge n_\omega^* \tag{156}$$

なので，

$$\begin{aligned}(155)\text{式} &\le (1-\beta)\phi - \varepsilon + \beta(1-\varepsilon_1)(\phi+\varepsilon) + \beta\varepsilon\overline{V} \\ &< \phi - \varepsilon - \beta\varepsilon_1\phi + \beta\varepsilon_1\overline{V} + \beta(1-\varepsilon_1)\varepsilon \\ &= \phi + (\overline{V} - \phi)\beta\varepsilon_1 - \{1-\beta(1-\varepsilon_1)\}\varepsilon \end{aligned} \tag{157}$$

となる。ここで，

$$(\overline{V} - \phi)\beta\varepsilon_1 < \{1-\beta(1-\varepsilon_1)\}\varepsilon \tag{158}$$

となるように$n > n^*$を大きく選ぶと，

$$V^c(\omega, \mathbf{s} + n e_\omega) < \phi. \tag{159}$$

証明終

系２（既存企業の数がNを超えると参入は起こらない）

$$V^e(\mathbf{s}, 1) < x_1^e,\quad \forall \mathbf{s} \in \hat{S}_n(1),\quad n \ge N. \tag{160}$$

つまり，$m(\mathbf{s}) = 0$となるNが存在する。

証明

状態ωにいる企業の数をN_ωとする。$\omega=0$（$=\underline{\underline{\omega}}$）では$V=\phi$となるので，$\omega\geq 1$となる企業が市場に残っている。補題１より，十分大きな$N=\sum_{\omega=1}^{K} N_\omega$に対して，

$$V(\omega, \boldsymbol{s}+ne_\omega)<\phi+\varepsilon,\quad \forall n\geq N \tag{161}$$

となる。これを書き換えると，次のようになる。

$$\hat{S}_N(1)=\left\{\boldsymbol{s}\in S\left|\sum_{\omega\geq 1} s_\omega\geq N=\sum_{\omega=1}^{K} N_\omega\right.\right\} \tag{162}$$

について，

$$V(\omega, \boldsymbol{s})\leq\phi+\varepsilon,\quad \forall \boldsymbol{s}\in\hat{S}_n(1),\quad \forall n\geq N. \tag{163}$$

系１と同様の証明により，任意の$n\geq N$に対して，

$$V^e(\boldsymbol{s}, m)<\varepsilon\leq x_1^e,\quad \forall \boldsymbol{s}\in\hat{S}_n(1),\quad \forall m\geq 1 \tag{164}$$

となる。

証明終

命題３（均衡から導かれる産業構造の推移確率は，マルコフ過程を示す確率密度関数となる）

均衡での企業行動から導かれる産業構造の推移確率$Q(\boldsymbol{s}'|\,\boldsymbol{s})$（(17), (18)式）は，マルコフ過程を示す確率密度関数であり，

$$\Pr(\boldsymbol{s}_{t+1}\in B\,|\,\boldsymbol{s}_t=\boldsymbol{s})=\sum_{\boldsymbol{s}'\in B} Q(\boldsymbol{s}'\,|\,\boldsymbol{s}) \tag{2}$$

となる。

証明

推移確率$Q(\boldsymbol{s}'|\,\boldsymbol{s})$は，$S$上のマルコフ過程を導く条件付き確率分布関数$\mathscr{L}(\boldsymbol{s}, B)$を生成する確率密度関数となることを示す。ここで，

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{s}, B) = \sum_{\boldsymbol{s}' \in B} Q(\boldsymbol{s}' \mid \boldsymbol{s})\,,\quad B \subset S \tag{165}$$

とし，$\mathscr{S}$ を有限集合 S の σ–集合体（＝S の全ての部分集合からなる部分集合族）とする。

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{s}, B) \geq 0,\quad \forall B \in \mathscr{S} \tag{166}$$

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{s}, S) = 1 \tag{167}$$

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{s}, A \cup B) = \mathscr{L}(\boldsymbol{s}, A) + \mathscr{L}(\boldsymbol{s}, B),\quad A \cap B = \varnothing \tag{168}$$

を満たすので，$\mathscr{L}(\boldsymbol{s}, \cdot)$は $\mathscr{S}$上の確率測度である。任意の $a \in [0, 1]$に対して，$\{\boldsymbol{s} | \mathscr{L}(\boldsymbol{s}, B) \leq a\} \in \mathscr{S}$ は可測集合である。したがって，$\mathscr{L}(\cdot, B)$は可測関数である。(165)式より，

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{s}, B) = \Pr(\boldsymbol{s}' \in B | \boldsymbol{s}) \tag{169}$$

であるから，$\mathscr{L}(\boldsymbol{s}, B)$は条件付き確率分布関数となる。

　$\mathscr{L}$ により導かれる確率過程$\{s_t\}$が，マルコフ過程であることを示す。Q は推移確率であることから，

$$\Pr(\boldsymbol{s}_t \in S\ \ (t = 0, \cdots, n)) = \prod_{t=0}^{n-1} Q(\boldsymbol{s}_{t+1} \mid \boldsymbol{s}_t) \tag{170}$$

となり，条件付き確率の公式より，

$$\begin{aligned}
\Pr(\boldsymbol{s}_{t+1} \in B \mid \boldsymbol{s}_0, \cdots, \boldsymbol{s}_t) &= \frac{\sum_{\boldsymbol{s}_{t+1} \in B} \Pr(\boldsymbol{s}_0, \cdots, \boldsymbol{s}_t, \boldsymbol{s}_{t+1})}{\Pr(\boldsymbol{s}_0, \cdots, \boldsymbol{s}_t)} \\
&= \frac{\prod_{i=0}^{t-1} Q(\boldsymbol{s}_{i+1} \mid \boldsymbol{s}_i) \sum_{\boldsymbol{s}_{t+1} \in B} Q(\boldsymbol{s}_{t+1} \mid \boldsymbol{s}_t)}{\prod_{i=0}^{t-1} Q(\boldsymbol{s}_{i+1} \mid \boldsymbol{s}_i)} \\
&= \sum_{\boldsymbol{s}_{t+1} \in B} Q(\boldsymbol{s}_{t+1} \mid \boldsymbol{s}_t) \\
&= \Pr(\boldsymbol{s}_{t+1} \in B \mid \boldsymbol{s}_t) = \mathscr{L}(\boldsymbol{s}_t, B).
\end{aligned} \tag{171}$$

これより，$\mathscr{L}$はマルコフ過程の確率分布関数であり，$Q(\boldsymbol{s}'|\ \boldsymbol{s})$は $\mathscr{L}$の確率密度関数となる。

証明終

定理１（均衡の存在）

均衡$[\{V(\omega, \boldsymbol{s}), x(\omega, \boldsymbol{s}), \chi(\omega, \boldsymbol{s}), Q(\boldsymbol{s}'|\ \boldsymbol{s}), m(\boldsymbol{s})\}_{(\omega,\ \boldsymbol{s})\ \in\ \Omega \times S}, \boldsymbol{s}^0]$が存在する。

証明

４つの写像

ⅰ）$V : \Omega \times S \rightarrow [\phi, \overline{V}]$

ⅱ）$x : \Omega \times S \rightarrow [0, \overline{x}]$

ⅲ）$\mathscr{L} : S \ \rightarrow\ \Delta^S$

ⅳ）$V^e : \hat{M} \times S \rightarrow [\phi, \overline{V}]$

を考える。ただし，$\hat{M} = \{0,1,\cdots,M\}$ は実現可能な参入企業数の集合，Δ^S は有限集合 S 内にサポートを持つ確率測度の集合で，$|S|-1$ 次元単体である。命題１，命題２より，$\Omega, S, \hat{M}$ は有限集合となる。$\mathscr{L}$は確率密度関数 Q によって生成される条件付き確率分布関数である[9)]。

この４つの写像を，実数ユークリッド空間のコンパクト部分集合上の点（連続的な値を取る）として考える。つまり，

$$V \in [\phi, \overline{V}]^{|\Omega| \times |S|} \tag{172}$$

$$x \in [0, \overline{x}]^{|\Omega| \times |S|} \tag{173}$$

$$\mathscr{L} \in (\Delta^S)^{|S|} \tag{174}$$

$$V^e \in [\phi, \overline{V}]^{|\hat{M}| \times |S|} \tag{175}$$

---

9)　$Q(\boldsymbol{s}^i|\ \boldsymbol{s}) = p_i$ とすると，

$$\Delta^S = \left\{ \boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_H) \middle| p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{H} p_i = 1 \right\}$$

であり，$\mathscr{L} : \boldsymbol{s} \in S \mapsto \boldsymbol{p} \in \Delta^S$.

とする。$\mathscr{L}$（あるいはそれを生成する Q）を x, V, V^e に対応させる写像

$$\zeta:(\Delta^S)^{|S|}\to[0,\bar{x}]^{|\Omega|\times|S|}\times[\phi,\bar{V}]^{|\Omega|\times|S|}\times[\phi,\bar{V}]^{|\hat{M}|\times|S|} \tag{176}$$

および，x, V, V^e を $\mathscr{L}$（あるいは Q）に対応させる写像

$$\psi:[0,\bar{x}]^{\|\Omega\|\times|S|}\times[\phi,\bar{V}]^{|\Omega|\times|S|}\times[\phi,\bar{V}]^{|\hat{M}|\times|S|}\to(\Delta^S)^{|S|} \tag{177}$$

をそれぞれ考える。写像ζは，Q から，ベルマン方程式(7)式より V を，１階の条件(12)式より x を，参入企業の評価関数(8)式より V^e を同時に導く写像である。写像ψは x, V, V^e に対して，(15), (16), (17), (18)式を通じて Q を導く写像である。

さらに，合成写像$\mathscr{V}=\psi\circ\zeta$

$$\mathscr{V}:(\Delta^S)^{|S|}\to(\Delta^S)^{|S|} \tag{178}$$

を考える。$\mathscr{V}$が不動点 $\mathscr{L}$*を持つときに均衡は存在する。このとき，均衡の Q と，さらには写像ζより均衡の V^e, V, x も導かれる。これらの写像について，以下の補題２～４が成立する。

補題２

ζは連続関数である。

証明

q_ω, q^0が連続的に変化するとき，Q も連続的に変化し，さらには $\mathscr{L}$も連続的に変化する。(30), (31)式より，T は q_ωに関する連続関数であるので，$V=TV$ も q_ωの連続関数である（$V=V(\mathscr{L})$と書くことにする）。x は $G(\omega, \mathbf{s})=c(\omega)$を解いたものであり，(68)式より，$G(\omega,\ \mathbf{s})$は V の変化と q_ωの変化に応じて連続的に変化するので，x は V と $\mathscr{L}$の連続関数である（$x=x(V, \mathscr{L})=x(V(\mathscr{L}), \mathscr{L})$と書く）。(8)式より，$V^e$ は V と q^0の連続関数である（$V^e=V^e(V, \mathscr{L})=V^e(V(\mathscr{L}), \mathscr{L})$と書く）。これより，$\zeta(\mathscr{L})=(x, V, V^e)=(x(V(\mathscr{L}), \mathscr{L}), V(\mathscr{L}), V^e(V(\mathscr{L}), \mathscr{L}))$と書け，$\zeta$は連続関数の合成と積であるから，$\zeta$は連続関数となる。

証明終

補題３

ψ は連続関数である。

証明

$\pi(\omega' - \eta | \omega, x) = p_{\omega'\omega}(\eta, \boldsymbol{s})$であるから，$x$ が連続的に変化することで，$p_{\omega'\omega}(\eta, \boldsymbol{s})$ も連続的に変化する（$p(x)$と書く）。また，(14)式より，$m(\boldsymbol{s})$は V^e について連続的に変化するので，V についても連続的に変化する（$m(V^e(V))$と書く）。(15), (16), (17), (18)式より，Q は$p_{\omega'\omega}(\eta, \mathrm{s})$と $m(\boldsymbol{s})$によって決定される（$\mathscr{L} = \mathscr{L}(p, m)$と書く）。これより，$\mathscr{L} = \psi(x, V, V^e) = \mathscr{L}(p(x), m(V^e(V)))$となり，連続関数の合成関数であるから，$\mathscr{L}$は x, V, V^e について連続的に変化する。したがって，ψ は連続関数である。

証明終

補題４

$\mathscr{V}$は不動点 $\mathscr{L}^*$を持つ。つまり，

$$\mathscr{L}^* = \mathscr{V}(\mathscr{L}^*), \quad \mathscr{L}^* \in (\Delta^S)^{|S|}. \tag{179}$$

証明

補題２と補題３より，ψ とζは連続関数なので $\mathscr{V}$ も連続関数である。Δ^S は単体なので，チコノフの定理（コンパクト集合のカルテシアン積はコンパクト集合である）より，$(\Delta^S)^{|S|}$ は凸集合かつコンパクト集合である。したがって，$\mathscr{V}$ はコンパクト凸集合からコンパクト凸集合への連続関数となる。ブラウアーの不動点定理より，$\mathscr{V}$は不動点を持つ。

証明終

定理２(a)（産業構造の均衡動学はマルコフ過程である）

$Q(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}')$によって導かれる確率過程$\{\boldsymbol{s}_t\}_{t=0}^{\infty} \in (S^{\infty}, \otimes\mathscr{S})$ は，マルコフ過程である。

証明

推移確率行列 Q の要素 $Q(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}')$について，

$$Q(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}') = Q(\boldsymbol{s}' | \boldsymbol{s}) \tag{180}$$

と定義する。命題３の証明から，

$$\sum_{\boldsymbol{s}' \in B} Q(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}') = \Pr(\boldsymbol{s}_{t+1} \in B \mid \boldsymbol{s}_t = \boldsymbol{s}) \tag{181}$$

であり，Q によって導かれる確率過程 $\{\boldsymbol{s}_t\}_{t=0}^{\infty}$ はマルコフ過程となる。

コルモゴロフの拡張定理（有限次元$\{\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{s}_1, \cdots, \boldsymbol{s}_\tau\}$の確率分布が与えられると，無限次元 $\{\boldsymbol{s}_t\}_{t=0}^{\infty}$ の確率分布がただ１つに定まる）から[10)]，

$$P_s(\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{s}_1, \cdots, \boldsymbol{s}_\tau) = e_s \prod_{t=0}^{\tau-1} Q(\boldsymbol{s}_t, \boldsymbol{s}_{t+1}) \tag{182}$$

によってマルコフ過程の確率測度 P_s は一意に与えられる。

証明終

定理２(b)

S は正再帰的な連結類 $R \subset S$ を持ち[11)]，それはただ１つである。

補題５～８により証明する。

補題５

少なくとも１つの正再帰的な連結類 $R \subset S$ が存在する。

---

10) コルモゴロフの拡張定理は次のことを主張するものである。$(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$上の確率測度 μ_n が，

整合性条件：$\mu_{n+1}(A \times \mathbb{R}) = \mu_n(A)$，$A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$

を満たすとき，$\mathbb{R}^\infty$上の確率測度が一意に存在して，

$\mu(A \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \mu_n(A)$，$A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

ただし，$A \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \cdots) | (x_1, \cdots, x_n) \in A\}$，$\mathscr{B}(\cdot)$はボレル集合体である。

11) $i \to j$ かつ $j \to i$（つまり，$i \leftrightarrow j$）なら，状態 i と状態 j は連結するという。A に属する任意の状態が，A に属する任意の状態へ到達可能であるとき，A を連結類と呼ぶ。つまり，任意の $i, j \in A$ について $i \leftrightarrow j$ となる。正再帰とは，再帰（$i \to i$）時間の期待値が有限となることである。

証明

状態 i は状態 j に到達可能であることを $i \to j$ と表す[12)]。S は有限集合（したがってコンパクト集合）なので，エッセンシャルな状態 $\boldsymbol{s}^*$ が存在する[13)]。そこで，

$$R = \{\boldsymbol{s} \in S | \boldsymbol{s} \leftrightarrow \boldsymbol{s}^*\} \tag{183}$$

とする。つまり，R に属する $\boldsymbol{s}$ は $\boldsymbol{s}^*$ と連結する。$R \subset S$ より，R は有限集合（コンパクト集合）であるから，無限列 $\{\boldsymbol{s}_n\} \subset R$ はある点 $\tilde{\boldsymbol{s}} \in R$ を無限個含む。ゆえに，任意の初期状態 $\boldsymbol{s}_0 \in R$ に対して，

$$P_s(\boldsymbol{s}_n = \tilde{\boldsymbol{s}} \text{ i.o.}) > 0 \tag{184}$$

となる[14)]。これより，

$$\Pr(\tilde{\boldsymbol{s}} \to \tilde{\boldsymbol{s}}) = 1 \tag{185}$$

となるので[15)]，$\tilde{\boldsymbol{s}}$ は再帰的状態である。

$\tilde{\boldsymbol{s}} \to \boldsymbol{s} \in R$ とすると，$\tilde{\boldsymbol{s}}$ は再帰的なので $\boldsymbol{s} \to \tilde{\boldsymbol{s}}$ 。ゆえに，

$$\Pr(\tilde{\boldsymbol{s}} \to \boldsymbol{s}) = \Pr(\boldsymbol{s} \to \tilde{\boldsymbol{s}}) = \Pr(\boldsymbol{s} \to \boldsymbol{s}) = 1, \quad \forall \boldsymbol{s} \in R. \tag{186}$$

すなわち，R は再帰的な連結類である。さらに，R は有限集合なので，再帰時間の期待値は有限となり，連結類が正再帰的であることが示される。

証明終

補題６

$\boldsymbol{s} \to \bar{\boldsymbol{s}}$，$\forall \boldsymbol{s} \in S$ なる $\bar{\boldsymbol{s}}$ が存在する。

---

12) 状態 i が状態 j に到達可能であるとは，$Q^{(n)}(i,j) > 0$ となる n が存在することである。
13) エッセンシャルな状態 i とは，$i \to j$ ならば $j \to i$ となる状態のことである。
14) i.o.とはその状態が何回も実現する（infinitely often）という意味である。
15) $\Pr(i \to j)$とは，状態 j から出発し（任意の期間に）状態 j に到達する確率とする。

証明

N を状態$\omega^0 = \min \Omega$ にいる企業数として，

$$\bar{\boldsymbol{s}} = \{0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ \omega^0\text{番目}}}{N},0,\cdots,0\} \tag{187}$$

と定める。$P_s(\boldsymbol{s}_T = \bar{\boldsymbol{s}}) > 0$ なる T が存在することを示せば，補題は証明されたことになる。このために，$\boldsymbol{s}_t$ の軌跡 $\{\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}_1, \cdots, \boldsymbol{s}_{T-1}, \boldsymbol{s}_T = \bar{\boldsymbol{s}}\}$ が存在して，

$$P_s(\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}_1, \cdots, \boldsymbol{s}_{T-1}, \boldsymbol{s}_T = \bar{\boldsymbol{s}}) > 0 \tag{188}$$

となることを示す。任意の初期状態 $\boldsymbol{s}$ を出発し，その後の推移を以下の２段階に分けて考える。

第１段階：

$$s_K{}' = 0 \tag{189}$$

$$s_\omega{}' = s_{\omega+1}, \quad \forall \omega \neq \omega^0, \quad \forall \omega \geq \underline{\underline{\omega}}(\boldsymbol{s}) \tag{190}$$

$$s'_{\omega^0} = s_{\omega^0+1} + m(\boldsymbol{s}) \tag{191}$$

なる $\boldsymbol{s}'$を考える（図７）。

推移確率は，

$$Q(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}') = p_{-1} \prod_{\omega \geq \underline{\underline{\omega}}(\boldsymbol{s})} \{\pi(\omega \mid \omega, x(\omega, \boldsymbol{s})\}^{s_\omega} \{P(\omega^0)\}^{m(\boldsymbol{s})} > 0 \tag{192}$$

となる。すべての企業がω^0以下の状態に到達するまで，この産業構造の推移を繰り返す。τ_1期間で達成され，次のような状態になるとする。

$$\boldsymbol{s}_{\tau_1} = \{n_0, n_1, \cdots, n_{\omega^0}, 0, \cdots, 0\}. \tag{193}$$

これから先は第２段階に進む。

第２段階：

$\boldsymbol{s} \in \{\boldsymbol{s} \mid s_\omega = 0, \ \forall \omega > \omega^0\}$に対して，

$$s_{\omega}' = 0,\quad \forall \omega > \omega^0 \tag{194}$$

$$s'_{\omega^0} = s_{\omega^0} + m(\boldsymbol{s}) \tag{195}$$

$$s'_{\omega^0 - 1} = 0 \tag{196}$$

$$s_{\omega}' = s_{\omega+1},\quad \forall \omega < \omega^0 - 1 \tag{197}$$

なる $\boldsymbol{s}'$を考える（図８）。

推移確率は，

$$Q(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}') = p_{-1}\{\pi(\omega^0+1\,|\,\omega^0, x(\omega^0,\boldsymbol{s}))\}^{s_{\omega^0}} \prod_{\omega\in W}\{\pi(\omega\,|\,\omega, x(\omega,\boldsymbol{s}))\}^{s_\omega}\{P(\omega^0)\}^{m(\boldsymbol{s})} > 0 \tag{198}$$

となる。ただし，

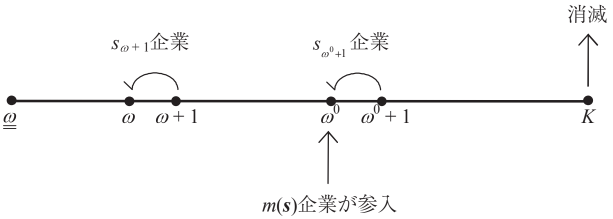

図７　第１段階の産業構造の推移（第０期～第τ_1期）

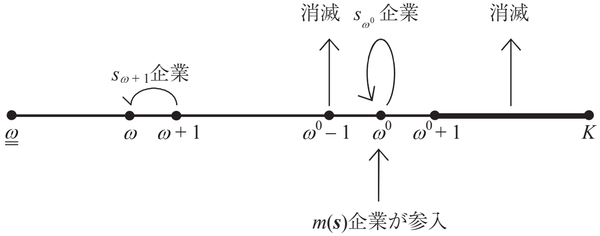

図８　第２段階の産業構造の推移（第τ_1＋１期～第τ_1＋τ_2期）

$$W = \{\omega \in \Omega \mid \underline{\underline{\omega}}(\boldsymbol{s}) \le \omega < \omega^0\}\,. \tag{199}$$

ω^0未満の状態にいる企業がすべて退出し，ω^0にだけ企業が残るまで，この推移を繰り返す。τ_2期間でそうなるとする。第 $T = \tau_1 + \tau_2$期の産業構造は，次のようになる。

$$\bar{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{s}_T = \{0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ \omega^0\text{番目}}}{N},0,\cdots,0\}\,. \tag{200}$$

ただし，

$$N = \arg\min_n \{m(0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ \omega^0\text{番目}}}{n},0,\cdots,0) = 0\}$$

$$= n_{\omega^0} + \sum_{t=\tau_1+1}^{\tau_1+\tau_2} m(\boldsymbol{s}_t)\,. \tag{201}$$

証明終

補題７

$\bar{\boldsymbol{s}} \in R$ である。

証明

補題５の証明より再帰的状態$\tilde{\boldsymbol{s}} \in R$が存在して，補題６より$\tilde{\boldsymbol{s}} \to \bar{\boldsymbol{s}}$となる。$\tilde{\boldsymbol{s}}$は再帰的状態なので$\bar{\boldsymbol{s}} \to \tilde{\boldsymbol{s}}$である。したがって，$\tilde{\boldsymbol{s}} \leftrightarrow \bar{\boldsymbol{s}}$。$\tilde{\boldsymbol{s}} \in R$より$\tilde{\boldsymbol{s}} \leftrightarrow \boldsymbol{s}^*$となり，$\bar{\boldsymbol{s}} \leftrightarrow \boldsymbol{s}^*$。つまり$\bar{\boldsymbol{s}} \in R$。

証明終

補題８

任意の再帰的状態$\hat{\boldsymbol{s}} \in S$について，$\hat{\boldsymbol{s}} \in R$である。

証明

補題６より $\hat{\boldsymbol{s}} \to \bar{\boldsymbol{s}}$ である。$\hat{\boldsymbol{s}}$ は再帰的状態なので，$\bar{\boldsymbol{s}} \to \hat{\boldsymbol{s}}$ となる。これより，$\hat{\boldsymbol{s}} \leftrightarrow \bar{\boldsymbol{s}}$。補題７より $\bar{\boldsymbol{s}} \in R$，したがって $\bar{\boldsymbol{s}} \leftrightarrow \boldsymbol{s}^*$ なので $\boldsymbol{s}^* \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{s}}$。よって，$\hat{\boldsymbol{s}} \in R$。つまり，$R$ は S の唯一の正再帰的な連結類となる。対偶を考えると，$\boldsymbol{s} \notin R$ ならば $\boldsymbol{s}$ は一時的状態となる。

証明終

定理２(c)(d)（産業構造の不変確率測度）

S 上の不変確率測度 $\mu^* = [\mu_s^*]_{s \in S}$ が一意に存在して，次のようになる。

$$\mu_s^* = \begin{cases} [m_Q(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s})]^{-1} & （\boldsymbol{s} \in R \text{ のとき}） \\ 0 & （\boldsymbol{s} \in S \setminus R \text{ のとき}）. \end{cases} \tag{202}$$

ただし，$m_Q(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{s}')$は，状態 $\boldsymbol{s}$ から出発して，状態 $\boldsymbol{s}'$に初めて到達する時間の P_s–期待値（平均到達時間）である。さらに，

$$\mu^{(n)}(\boldsymbol{s}) \to \mu^*,\quad \forall \boldsymbol{s} \in S\ （n \to \infty）. \tag{203}$$

証明

定理２(b)において，S は正再帰的な連結類 R をただ１つ持つことが示された。したがって，R 上に一意の不変確率測度を持つ[16]。

$\mu^{(n)} \to \mu^*$を証明する。

$$\mu^{(n)} = \nu Q^n \tag{204}$$

なので，$\mu^{(n)}$が収束することと，Q^n が収束することは同値である。$\boldsymbol{s}'$が一時的状態（つまり，$\boldsymbol{s}' \notin R$）であるとき，

$$\lim_{n\to\infty} Q^n(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}') = 0 \tag{205}$$

となる。一方，$\boldsymbol{s}'$が再帰的状態（つまり，$\boldsymbol{s}' \in R$）であるとき，

16) エルゴード的マルコフ過程には，不変確率測度が存在する。

$$\lim_{n\to\infty} Q^n(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}') = \frac{\varphi_Q(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}')}{m_Q(\boldsymbol{s}',\boldsymbol{s}')} \tag{206}$$

となる[17)]。ただし，

$$\varphi_Q(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}') = P_s(\boldsymbol{s}_n = \boldsymbol{s}',\ \ \text{some } n). \tag{207}$$

これより，Q^n は確率測度に収束することが分かる。νQ^n（$n = 0, 1, \cdots$）も確率測度なので，$\mu^{(n)}$はある確率測度πに収束する。すなわち，

$$\lim_{n\to\infty} \mu^{(n)} = \pi\ . \tag{208}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\pi Q &= \left(\lim_{n\to\infty} \nu Q^n\right) Q = \nu \lim_{n\to\infty} Q^n Q \\ &= \nu \lim_{n\to\infty} Q^n = \lim_{n\to\infty} \nu Q^n = \pi\ .\end{aligned} \tag{209}$$

よって，πは Q の不変確率測度である。また，μ^*は S の唯一の不変確率測度であるので，

$$\pi = \mu^*. \tag{210}$$

(202)式を証明する。まず，$\boldsymbol{s}^i$ から出発して $\boldsymbol{s}^j$ へ到達するときの平均到達時間を考える。この推移について，以下の２つのルートを考えることができる。（１）$\boldsymbol{s}^i$ から出発して，次期の産業構造が $\boldsymbol{s}^j$ となる場合である。推移確率は $Q(\boldsymbol{s}^i, \boldsymbol{s}^j)$で，平均到達時間は１である。あるいは，（２）$\boldsymbol{s}^i$ から出発して，次期の産業構造は $\boldsymbol{s}^k$ であり（推移確率は $Q(\boldsymbol{s}^i, \boldsymbol{s}^k)$），その後 $\boldsymbol{s}^j$ に到達する場合である。平均到達時間は$1 + m_Q(\boldsymbol{s}^k, \boldsymbol{s}^j)$となる。これより，求める平均到達時間は次のようになる。

17) (204)，(205)式の証明は，紙幅の都合で省略する。小山（1999）などを参照されたい。

$$m_Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^j)=Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^j)\times 1+\sum_{k\neq j}Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^k)\{1+m_Q(\boldsymbol{s}^k,\boldsymbol{s}^j)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{H}Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^k)+\sum_{k\neq j}Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^k)m_Q(\boldsymbol{s}^k,\boldsymbol{s}^j)$$
$$=1+\sum_{k\neq j}Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^k)m_Q(\boldsymbol{s}^k,\boldsymbol{s}^j)$$
$$=1+\sum_{k=1}^{H}Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^k)m_Q(\boldsymbol{s}^k,\boldsymbol{s}^j)-Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^j)m_Q(\boldsymbol{s}^j,\boldsymbol{s}^j)\,. \tag{211}$$

両辺に $\mu_{\boldsymbol{s}^i}*$ をかけて，$i=1\sim H$ まで加えると，

$$\sum_{i=1}^{H}\mu_{\boldsymbol{s}^i}*m_Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^j)=\sum_{i=1}^{H}\mu_{\boldsymbol{s}^i}*+\sum_{i=1}^{H}\sum_{k=1}^{H}\mu_{\boldsymbol{s}^i}*Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^k)m_Q(\boldsymbol{s}^k,\boldsymbol{s}^j)-\sum_{i=1}^{H}\mu_{\boldsymbol{s}^i}*Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^j)m_Q(\boldsymbol{s}^j,\boldsymbol{s}^j)\,. \tag{212}$$

右辺第１項は，

$$\sum_{i=1}^{H}\mu_{\boldsymbol{s}^i}*=1\cdot \tag{213}$$

ここで，(27)式を成分で書くと，

$$\mu_{\boldsymbol{s}^k}*=\sum_{i=1}^{H}\mu_{\boldsymbol{s}^i}*Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^k) \tag{214}$$

なので，(212)式右辺第２項は，

$$\sum_{i=1}^{H}\sum_{k=1}^{H}\mu_{\boldsymbol{s}^i}*Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^k)m_Q(\boldsymbol{s}^k,\boldsymbol{s}^j)=\sum_{k=1}^{H}\left(\sum_{i=1}^{H}\mu_{\boldsymbol{s}^i}*Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^k)\right)m_Q(\boldsymbol{s}^k,\boldsymbol{s}^j)$$
$$=\sum_{k=1}^{H}\mu_{\boldsymbol{s}^k}*m_Q(\boldsymbol{s}^k,\boldsymbol{s}^j) \tag{215}$$

(212)式右辺第３項は，

$$\sum_{i=1}^{H}\mu_{\boldsymbol{s}^i}*Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^j)m_Q(\boldsymbol{s}^j,\boldsymbol{s}^j)=\left(\sum_{i=1}^{H}\mu_{\boldsymbol{s}^i}*Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^j)\right)m_Q(\boldsymbol{s}^j,\boldsymbol{s}^j)$$
$$=\mu_{\boldsymbol{s}^j}*m_Q(\boldsymbol{s}^j,\boldsymbol{s}^j)\,. \tag{216}$$

これより(212)式は，

$$\sum_{i=1}^{H}\mu_{\boldsymbol{s}^i}*m_Q(\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^j)=1+\sum_{k=1}^{H}\mu_{\boldsymbol{s}^k}*m_Q(\boldsymbol{s}^k,\boldsymbol{s}^j)-\mu_{\boldsymbol{s}^j}*m_Q(\boldsymbol{s}^j,\boldsymbol{s}^j)\,. \tag{217}$$

左辺と右辺第２項は同じであるから，

$$\mu_{s^j} * m_Q(\boldsymbol{s}^j, \boldsymbol{s}^j) = 1.$$

証明終

系３

$P_{\mu*}$は定常エルゴード的マルコフ過程[18)]の確率分布で，推移確率行列 Q を持ち，

$$\mu^* Q = \mu^* \tag{27}$$

となる。

証明

定理２(c)(d)より，μ*は不変確率測度なので，(27)式が示される。初期分布をμ*したとき，第 n 期の分布を$\mu^{(n)}$とすると，

$$\mu^{(n)} = \mu^{(n-1)}Q = \cdots = \mu^{(0)}Q^n = \mu^* Q^n = \mu^* Q^{n-1} = \cdots = \mu^* Q = \mu^*. \tag{218}$$

$P_{\mu*}$は時間に依存しないので定常的である。

証明終

参考文献

[1]　小山昭雄（1999）『経済数学教室別巻：確率論』，岩波書店。

[2]　小山昭雄（2010）『経済数学教室4：線型代数と位相（下）』，岩波書店。

[3]　宮沢政清（1993）『確率と確率過程』，近代科学社。

[4]　Ericson, R. and A. Pakes. (1992), “An Alternative Theory of Firm and Industry Dynamic.”, Cowles Foundation Discussion Paper No. 1041, Yale University.

[5]　Ericson, R. and A. Pakes. (1995), “Markov-Perfect Industry Dynamics : A Framework for Empirical Work.”, *Review of Economic Studies*, Vol.62, pp.53-82.

---

18) 定常的なマルコフ過程とは，確率分布が時間に依存しないことである。つまり $P_s(s_{t+1}, \cdots, s_{t+n}) = P_s(s_{u+1}, \cdots, s_{u+n})$。既約かつ非周期的かつ正再帰的であるとき，マルコフ過程はエルゴード的である。任意の $i, j \in C$ に対して $i \leftrightarrow j$ となり，$i \in C$, $j \notin C$ に対して，i は j へ到達可能ではない，つまり，閉じた連結類上のマルコフ過程を既約という。状態集合が有限であるときは，既約かつ非周期的ならば，正再帰的となる。

[6] Privault, N. (2013), *Understanding Markov Chains* : *Examples and Applications*, Springer.
[7] Stokey, N. and R. Lucas, Jr. (1989), *Recursive Methods in Economic Dynamics*.（Harvard University Press）
[8] Takayama, A.(1985), *Mathematical Economics*, Cambridge University Press.