産業動学に関する研究ノート（理論編）その２

加　藤　　　浩

加藤（2016）に引き続き，この研究ノートでは，産業動学に関する代表的な理論研究である Jovanovic（1982）のモデルを取り上げ，市場均衡条件を導出するに至るまでの理論分析を中心に，論文では省略されている議論を補いつつ，詳しく検討していく[1)]。

第 t 期の企業を特徴付ける変数は，生産費用の効率性を表すパラメータの期待値 x_t*と，市場で活動している期間 n である。したがって，第 t 期の産業構造は (x_t^*, n) の測度で表される。各企業の効率性パラメータには毎期ノイズが加わり確率的に変化するため，企業はこれまで観察された生産費用の実現値をもとに，効率性パラメータの真の値を推測した上で期待利潤を計算し，それが最大になるように生産量を決定する。均衡価格は，総供給量と総需要量が一致する水準に定まり，各企業の評価関数に影響を与える。そして，評価関数は各企業の参入決定の判断材料になり，また最適な退出政策を導く。したがって，各企業が形成する効率性パラメータに関する推測も，このような関係を通じて産業構造に影響を与える。

市場均衡は，市場価格列，生産量列，参入企業の測度列，および退出政策列から構成される。Jovanovic（1982）で得られた結果の１つは，市場均衡の満たす条件が，社会的余剰最大化の条件と一致するというものである。この結果は，とりわけ数値計算において大きな意味を持ち，各企業の利潤最大化問題と需給均衡条件，および自由参入条件から導くよりも，社会的余剰最大化問題から均

1)　Jovanovic（1982）では，いくつかの記号について重複があるので，本ノートでは一部記号を変更する。また，見やすくするために，第 t 期の関数を下付き文字で表すことにした。つまり，$X(t, a)$ を $X_t(a)$ などと書く。

衡経路を直接導出した方が，状態空間の次元が節約でき，したがって計算時間が短縮することが期待される。Jovanovic モデルで考えている社会的余剰最大化問題とは，次のようなものである。中央計画者は，与えられた総生産量の下で総費用が最小になるよう，参入企業の測度，各企業の退出政策，および割当生産量を指示する。この問題を解くことで，最小化された費用が総生産量の関数として導かれ，この関数を用いて社会的余剰が計算される。そして，中央計画者は社会的余剰を最大化するように総生産量の水準を決める。最小化された費用関数を導出するには，無限次元の変数に関して最適化問題を解く必要があることから，有限次元の最適化では存在し得ない種々の困難が生じる。Jovanovic（1982）の議論の大部分は，この点に費やされている。

１．モデルの設定と均衡の導出

1.1　記号の定義と仮定

（1）モデルの設定

・離散無限期間（$t = 0, 1, \cdots$）
・同質財を生産する無数の企業が，市場への参入を考えている
・各々の企業の測度はゼロであり，したがって，各々の企業が市場に与える影響は無視できる
・参入後，企業は最短１期間だけ生産活動をしないといけないが，その後は自由に退出できる
・生産費用は，効率性パラメータに影響を受け，それは毎期間確率的に変動する
・効率性パラメータと市場で活動している期間が企業の状態変数であり，企業によってその水準が異なるので，各企業は異質的となる
・市場で活動する企業は，毎期間，効率性パラメータの実現値が判明する前に，また，市場価格を外生的に与えられたものとして，期待利潤が最大になるように生産量を決める
・市場価格は総需要量と総供給量が一致するように定まる

（2）生産費用

$c(q_t)x_t$ ・・・生産費用

q_t ・・・第 t 期の生産量

x_t ・・・効率性パラメータ（確率変数）

・$c(\cdot)$の仮定

（仮定 c-1）$c(0) = 0$

（仮定 c-2）$c'(0) = 0$

（仮定 c-3）$c'(q_t) > 0$

（仮定 c-4）$c''(q_t) > 0$

（仮定 c-5）$\lim_{q_t \to \infty} c'(q_t) = \infty$

$x_t = \xi(\omega_t)$ ・・・効率性パラメータの決定式

$\omega_t = \theta + \varepsilon_t$ ・・・効率性パラメータから観察されるデータ[2)]

θ ・・・企業のタイプ（確率変数）

ε_t ・・・固有ショック（ノイズ）

・θについて

（仮定θ-1）$\theta \sim N(\bar{\theta}, \sigma_\theta{}^2)$

（仮定θ-2）参入すると自己のタイプθが確率的に決まり，企業はその実現値は分からないが，θの分布は知っている

（仮定θ-3）θの実現値は毎期間一定である

・ε_tについて

（仮定ε-1）$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

（仮定ε-2）ε_tは i.i.d.

2) $\xi(\cdot)$の仮定より，効率性パラメータ x_t とデータ ω_t は 1 対 1 対応である。ω_t の構成要素のうち，θは期間を通じて不変であるが，ε_t は期間ごとに値が変化するノイズである。

（仮定ε-3）ε_t は企業間で独立

（仮定ε-4）ε_t は毎期確率的に変化し，企業はその実現値は分からないが，ε_t の分布は知っている

・$\xi(\cdot)$の仮定

（仮定ξ-1）$\xi > 0$

（仮定ξ-2）$\xi' > 0$

（仮定ξ-3）$\lim_{\omega_t \to -\infty} \xi(\omega_t) = \alpha_1 > 0$

（仮定ξ-4）$\lim_{\omega_t \to \infty} \xi(\omega_t) = \alpha_2 \le \infty$

・価格について

p_t　・・・第 t 期の価格（所与）

$p = \{p_t\}_{t=0}^{\infty}$　・・・価格経路（所与）

（仮定 p）p は有界列

1.2　生産量の決定

x_t^*　・・・第 t 期の期首までに得られた情報をもとにして計算された x_t の期待値[3)]

x_t の期待値 x_t^*を計算した上で，期待利潤が最大になるように生産量を決定する。生産量を決定した後に，x_t の値が観察できる。

各企業は，期待利潤最大化問題

3)　n 期間活動している企業が，第 t 期の期首までに得た情報を $I_t = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$とする。情報 I_t をもとに計算される期待値オペレータを $E_t = E(\cdot | I_t)$とすると，

$$E(x_t | I_t) = x_t^*$$

となる。したがって，第 $t'(< t)$期では I_t は確率変数となるから，条件付き期待値 x_t^*も確率変数となる。

$$\underset{q_t}{\text{Max}}\ \{p_t q_t - c(q_t)x_t^*\} \tag{1}$$

を解いて生産量 q_t を決定する。１階の条件は次のようになる。

$$p_t - c'(q_t)x_t^* = 0. \tag{2}$$

これを解くことで，最適な生産量が求まり，

$$q_t = q(p_t | x_t^*) \tag{3}$$

と表すことができる4)。

最大化された期待利潤は次のように書ける。

$$\pi(p_t, x_t^*) = p_t q(p_t | x_t^*) - c(q(p_t | x_t^*))x_t^*. \tag{4}$$

これを全微分すると，

$$-c''(q_t)x_t^* dq_t - c'(q_t)dx_t^* = 0. \tag{5}$$

よって，

$$\frac{\partial q}{\partial x_t^*} = -\frac{c'}{x_t^* c''} < 0 \cdot \tag{6}$$

(6)式を x_t^*で偏微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 q}{\partial x_t^{*2}} &= \frac{\partial}{\partial x_t^*}\left(-\frac{c'}{x_t^* c''}\right) \\ &= -c''\frac{\partial q}{\partial x_t^*}\frac{1}{x_t^* c''} + \frac{c'}{(x_t^* c'')^2}\left(c'' + x_t^* c'''\frac{\partial q}{\partial x_t^*}\right) \\ &= \frac{1}{x_t^*}\left(\frac{c'c'''}{c''^2} - 2\right)\frac{\partial q}{\partial x_t^*} \cdot \end{aligned} \tag{7}$$

---

4)　参入期から見ると x_t^*は確率変数となるので，生産量列 $\{q(p_t | x_t^*)\}_{t=\tau}^{\infty}$ は $q(p_\tau | x_0)$，$x_\tau^*= x_0$ から出発する確率過程となる。

1.3　ベルマン方程式

W　・・・退出価値（一定，かつすべての企業で共通）

k　・・・参入費用（一定，かつすべての企業で共通）

β　・・・割引因子

n　・・・市場での活動期間（企業の年齢）

τ　・・・参入する期（企業の vintage）[5)]

第 t 期で活動している企業について，

$$n = t - \tau. \tag{8}$$

$P^0(\omega \mid \overline{\omega}_n, n)$　・・・$(\omega_1, \cdots, \omega_n)$を観察したときの ω_{n+1} の予測分布

$\omega_{n+1} \leq \omega$となる確率

$\overline{\omega}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i}{n}$　・・・標本平均

企業は$\xi(\cdot)$の形を知っているので，x_t を観察することでω_t の値を知る。ω_t は，θにノイズ ε_tが加えられた値であるため，n 期間に渡り市場で活動している企業は，これまで得られたデータ$(\omega_1, \cdots, \omega_n)$をもとに，$\theta$の実現値を推測する。$\theta$は正規分布に従うので，$(\overline{\omega}_n, n)$ はθの事後分布（＝事後信念）の十分統計量となる[6)]。これより，ω_{n+1}の予測分布は$(\overline{\omega}_n, n)$ によって決まり，$P^0(\omega \mid \overline{\omega}_n, n)$ と表さ

---

5)　$x_\tau^* = x_0$ とする。これは，参入前の事前情報（＝初期分布）で形成した期待値である。

6)　標本情報$(\omega_1, \cdots, \omega_n)$を観察して，$\theta$の実現値を推測する。$\Pr(\theta)$を事前分布（＝事前信念），$\Pr(\omega_1, \cdots, \omega_n \mid \theta)$を尤度とすると，ベイズ・ルールから，$\theta$の事後確率は，

$$\Pr(\theta \mid \omega_1, \cdots, \omega_n) = \frac{\Pr(\omega_1, \cdots, \omega_n \mid \theta)\Pr(\theta)}{\Pr(\omega_1, \cdots, \omega_n)}$$

となる。いま，観測値$(\omega_1, \cdots, \omega_n)$に対して，統計量 $t_i = t_i(\omega_1, \cdots, \omega_n)$を考える。$t(\omega_1, \cdots, \omega_n) = (t_1, \cdots, t_k)$とする。尤度が，

$$\Pr(\omega_1, \cdots, \omega_n \mid \theta) = \Pr(t(\omega_1, \cdots, \omega_n) \mid \theta) \times \Pr(\omega_1, \cdots, \omega_n)$$

となるとき，t_i（$i = 1, \cdots, k$）をこの尤度の十分統計量と呼ぶ。このとき，事後確率は十分統計量のみの関数となる。したがって，事後信念から期待値を形成するうえで，t_i（$i = 1, \cdots, k$）は十分な情報である。

れる[7)]。

---

7)　情報$(\omega_1,\cdots,\omega_n)$をもとに$\omega_{n+1}$の分布を予測する。$\omega_i \sim N(\theta,\sigma^2)$（$i=1,\cdots,n$）とする。ここで，$\sigma^2$の値は既知である。$(\omega_1,\cdots,\omega_n)$と$\omega_{n+1}$の分布は共通のパラメータ$\theta$を持つ。$\omega_i$の密度関数を$f$，$\theta$の密度関数を$g$で表す。まず，

$$f(\omega_1,\cdots,\omega_n,\omega_{n+1})=\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega_1,\cdots,\omega_n,\omega_{n+1},\theta)d\theta$$

であることから，両辺を$f(\omega_1,\cdots,\omega_n)$で割ると，

$$\frac{f(\omega_1,\cdots,\omega_n,\omega_{n+1})}{f(\omega_1,\cdots,\omega_n)}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\omega_1,\cdots,\omega_n,\omega_{n+1},\theta)}{f(\omega_1,\cdots,\omega_n)}d\theta$$

となる。ここで，

$$\begin{aligned}f(\omega_1,\cdots,\omega_n,\omega_{n+1})&=f(\omega_1,\cdots,\omega_n)f(\omega_{n+1}|\,\omega_1,\cdots,\omega_n)\\ f(\omega_1,\cdots,\omega_n,\omega_{n+1},\theta)&=f(\omega_1,\cdots,\omega_n,\theta)f(\omega_{n+1}|\,\theta)\\ &=f(\omega_1,\cdots,\omega_n)g(\theta|\,\omega_1,\cdots,\omega_n)f(\omega_{n+1}|\,\theta)\end{aligned}$$

であるから，ω_{n+1}の予測分布が求まり，以下の式で与えられる。

$$f(\omega_{n+1}\,|\,\omega_1,\cdots,\omega_n)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega_{n+1}\,|\,\theta)g(\theta\,|\,\omega_1,\cdots,\omega_n)d\theta\cdot$$

θの事前分布は$N(\bar{\theta},{\sigma_\theta}^2)$，尤度の分布は$N(\theta,\sigma^2)$となるから，$(\omega_1,\cdots,\omega_n)$を観察したときの$\theta$の事後分布は，

$$N\left(\frac{\dfrac{n}{\sigma^2}\bar{\omega}_n+\dfrac{1}{{\sigma_\theta}^2}\bar{\theta}}{\dfrac{n}{\sigma^2}+\dfrac{1}{{\sigma_\theta}^2}},\frac{1}{\dfrac{n}{\sigma^2}+\dfrac{1}{{\sigma_\theta}^2}}\right)$$

に従う（密度関数は$g(\theta|\,\omega_1,\cdots,\omega_n)$）。いま，$\theta$の事前確率密度を$g(\theta)=$一定と仮定する。この仮定は，$\theta$に関する情報が完全にないことを想定したもので，$\sigma_\theta{}^2\to\infty$とした状況と同じである。したがって，$\theta$の事後分布は$N\left(\bar{\omega}_n,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$である。また，$\theta$が与えられたときの$\omega_{n+1}$の事後分布は$N(\theta,\sigma^2)$に従う（密度関数は$f(\omega_{n+1}|\,\theta)$）。以上より，$\omega_{n+1}$の予測分布は次のようになる。

$$\begin{aligned}f(\omega_{n+1}|\,\omega_1,\cdots,\omega_n)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\omega_{n+1}-\theta)^2\right\}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{n(\theta-\bar{\omega}_n)^2}{2\sigma^2}\right\}d\theta\\ &=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{n(\omega_{n+1}-\bar{\omega}_n)^2}{n+1}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(n+1)\left(\theta-\frac{\omega_{n+1}+n\bar{\omega}_n}{n+1}\right)^2\right\}d\theta\end{aligned}$$

ここで，$(\omega_1,\cdots,\omega_{n+1})$を観察したときの$\theta$の事後分布は$N\left(\bar{\omega}_{n+1},\dfrac{\sigma^2}{n+1}\right)$であるから，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(n+1)\left(\theta-\frac{\omega_{n+1}+n\bar{\omega}_n}{n+1}\right)^2\right\}d\theta=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

となる。よって，

x_t*は次のように計算される。

$$x_t* = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \xi(\omega) P^0(d\omega \mid \overline{\omega}_n, n) \cdot \tag{9}$$

ξはωの増加関数であるから, n を所与とすると, x_t*は $\overline{\omega}_n$ の増加関数となる[8)]。$\overline{\omega}_n$ の替わりに x_t*を用いて，x_{t+1}*の予測分布の十分統計量とする。x_t*の実現値を $x_t* = x$ とすると，期待値を計算するのに必要な情報は(x, n)となる。

$P(z| x, n)$　・・・x_{t+1}*の予測分布，$x_{t+1}* \le z$ となる確率

$V_t(x, n; p)$　・・・第 t 期に市場で活動する企業の評価関数[9)]

$\gamma_t(n;\ p)$　・・・n 期間市場で活動する企業が，第 t 期で市場に残るのと退出するのが無差別となる x_t*（最適退出政策）

$\gamma(p,\tau) = \{\gamma_t(t-\tau; p)\}_{t=\tau}^{\infty}$　・・・最適退出政策列

V_tに関するベルマン方程式（FE）を立てる。

$$\text{(FE)}\quad V_t(x,n;p) = \pi(p_t, x) + \beta \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathrm{Max}\{W, V_{t+1}(z, n+1; p)\} P(dz \mid x, n) . \tag{10}$$

特に，第τ期（参入期）のベルマン方程式は，次のようになる。

$$V_\tau(x_0, 0; p) - k = \pi(p_\tau, x_0) + \beta \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathrm{Max}\{W, V_{\tau+1}(z, 1; p)\} P(dz \mid x_0, 0) - k \cdot \tag{11}$$

退出決定は以下のようになる。

$$\begin{cases} V_t(x, n; p) \le W \Rightarrow \text{第 } t \text{ 期で市場から退出する} \\ V_t(x, n; p) > W \Rightarrow \text{第 } t \text{ 期では市場に残り生産を継続する} \end{cases} \tag{12}$$

すなわち，最適退出政策$\gamma_t(n; p)$は,

$$f(\omega_{n+1} \mid \omega_1, \cdots, \omega_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n+1}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{n(\omega_{n+1} - \overline{\omega}_n)^2}{n+1}\right\} .$$

すなわち，ω_{n+1} の予測分布は $N\left(\overline{\omega}_n, \frac{(n+1)\sigma^2}{n}\right)$ に従う。これは，$(\overline{\omega}_n, n)$ がω_{n+1} の分布を予測するための情報をすべて含んでいることを意味する。

8)　一定の n に対して，ω_i（$i = 1, \cdots, n$）は大きな値を取ることから，ω_{n+1} についてもより大きな値が実現する可能性が高い。

9)　企業の評価関数が t に依存するのは，価格が t に応じて外生的に定まるからである。

$$V_t(x, n; p) = W \tag{13}$$

を x について解いた関数となる[10)]。これより，

$$\begin{cases} x_t^* > \gamma_t(n; p) \Rightarrow \text{第 } t \text{ 期で市場から退出する} \\ x_t^* \leq \gamma_t(n; p) \Rightarrow \text{第 } t \text{ 期では市場に残り生産を継続する} \end{cases} \tag{14}$$

生産量については，

$$\begin{cases} q \leq q(p_t|\ \gamma_t(n; p)) \Rightarrow \text{第 } t \text{ 期で生産を停止（} q_t = 0 \text{）} \\ q > q(p_t|\ \gamma_t(n; p)) \Rightarrow \text{第 } t \text{ 期では生産を継続する（} q_t > 0 \text{）} \end{cases} \tag{15}$$

1.4　市場均衡

$\Psi_t(x|\ \tau; p) = \Pr(x_s^* < \gamma_s(s-\tau; p)$（$s = \tau+1, \cdots, t-1$），$x_t^* < \min\{x, \gamma_t(t-\tau; p)\})$

・・・第 s 期で最適退出政策 $\gamma_s(s-\tau; p)$（$s = \tau+1, \cdots, t$）に従いかつ第 t 期まで市場に残っているという条件の下で，$x_t^* \leq x$ となる確率[11)]

$x_t^* = x$ から $x_{t+1}^* \leq z$ への推移確率 $P(z|\ x, n)$を用いると，次の関係が成り立つ。

$$\Psi_{t+1}(x\,|\,\tau; p) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} P(\min\{x, \gamma_{t+1}((t+1)-\tau; p)\}\,|\,z, t-\tau)\Psi_t(dz\,|\,\tau; p)\,. \tag{16}$$

第 τ 期に参入した企業の第 t 期における期待生産量は，

$$\phi_t(\tau; p) = \int q(p_t\,|\,x)\Psi_t(dx\,|\,\tau; p) \tag{17}$$

となる。

y_τ　・・・第 τ 期に参入する企業の測度

$y = \{y_\tau\}_{\tau=0}^{\infty}$　・・・参入列

$y_\tau\phi_t(\tau; p)$　・・・第 τ 期に参入した企業の第 t 期における期待生産量

第 t 期の総生産量は，

---

10) 定理１より，V は x に関する減少関数となるので，γ_t は一意に定まる。

11) $\gamma_t(t-\tau; p) < x_t^* \leq x$ ならば，第 t 期で市場から退出する。

$$Q_t = \sum_{\tau=0}^{t} y_\tau \phi_t(\tau; p) = Q_t(p, y) \cdot \tag{18}$$

$Q = \{Q_t\}_{t=0}^{\infty}$　・・・総生産量列

$D_t(Q_t)$　・・・第 t 期の需要関数

・需要関数の仮定

（仮定 D-1）$D_t' < 0$

（仮定 D-2）十分小さな$\varepsilon > 0$に対して[12),]

$$D_t(\varepsilon) > \overline{\lambda}$$

（仮定 D-3）十分大きな定数 A に対して，

$$\int_0^\infty D_t(z)dz < A$$

（仮定 Q）Q は有界列

・市場均衡

価格列 $p = \{p_t\}_{t=0}^{\infty}$ を所与として，各企業は参入を決定し，市場で活動しているときは，生産量と退出政策を決める。これらの最適化行動から総供給量が決まり，総需要量と総供給量が一致するように均衡価格列 $p = \{p_t\}_{t=0}^{\infty}$ が定まる（均衡条件 E-1）。したがって，企業が予想する価格経路は自己実現的である。さらに，参入は自由であるため，参入により得られる純価値が退出価値に等しくなるまで参入が発生する（均衡条件 E-2）。均衡条件は次のようになる。

（均衡条件 E-1）$p_t = D_t(Q_t(p, y))$

（均衡条件 E-2）$V_t(x_0, 0; p) - k \begin{cases} = W & (y_t > 0 \text{のとき}) \\ \leq W & (y_t = 0 \text{のとき}) \end{cases}$

12) $\overline{\lambda}$ は $\{\lambda_t *\}_{t=0}^{\infty}$ の上限である。

1.5　逐次問題

以降は，ベルマン方程式（FE）から導くのではなく，逐次問題（SP）により，最適退出政策の条件を導くことにする[13)]。第τ期に参入する企業が獲得する期待利潤の割引現在価値は，次のように書ける。

$$V_\tau(x_0,0;p)=\sum_{t=\tau}^{\infty}\beta^{t-\tau}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\pi(p_t,x)\Psi_t(dx|\tau;p)+\sum_{t=\tau}^{\infty}\beta^{t-\tau}W\{\Psi_{t-1}(\alpha_2|\tau;p)-\Psi_t(\alpha_2|\tau;p)\}. \tag{19}$$

右辺第２項は，

ちょうど第 t 期で退出する確率

$=$少なくとも第 $t-1$期まで市場に残っている（$x_{t-1}{}^* \le \alpha_2$）確率

$-$少なくとも第 t 期まで市場に残っている（$x_t{}^* \le \alpha_2$）確率

$= \Psi_{t-1}(\alpha_2|\ \tau\,;p) - \Psi_t(\alpha_2|\ \tau\,;p)$

を表している。ただし，

$$\Psi_{\tau-1}(\alpha_2|\ \tau\,;p)=1 \tag{20}$$

とする。また，$x_t{}^* \ge \alpha_1$であるから，

$$\Psi_t(\alpha_1|\ \tau\,;p)=0. \tag{21}$$

この２式より，(19)式右辺第２項は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}\sum_{t=\tau}^{\infty}\beta^{t-\tau}W\{\Psi_{t-1}(\alpha_2|\tau;p)-\Psi_t(\alpha_2|\tau;p)\}&=W\left(\Psi_{\tau-1}(\alpha_2|\tau;p)+\beta\sum_{t=\tau}^{\infty}\beta^{t-\tau}\Psi_t(\alpha_2|\tau;p)-\sum_{t=\tau}^{\infty}\beta^{t-\tau}\Psi_t(\alpha_2|\tau;p)\right)\\&=-(1-\beta)W\sum_{t=\tau}^{\infty}\beta^{t-\tau}\Psi_t(\alpha_2|\tau;p)+W\\&=-(1-\beta)W\sum_{t=\tau}^{\infty}\beta^{t-\tau}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\Psi_t(dx|\tau;p)+W.\end{aligned} \tag{22}$$

これより，(19)式は次のように書き換えられる。

$$V_\tau(x_0,0;p)=W+\sum_{t=\tau}^{\infty}\beta^{t-\tau}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\{\pi(p_t,x)-(1-\beta)W\}\Psi_t(dx|\tau;p). \tag{23}$$

---

13) ベルマンの最適性原理より，（FE）の最適解と（SP）の最適解は一致するので，2 つの問題について，共通の最適退出政策列$\gamma(p,\tau)$を用いる。

γ_j　・・・j 期間市場で活動している企業の退出政策（最適政策とは限らない）

$\gamma = \{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$　・・・退出政策列（最適政策列とは限らない）

$\Gamma = \{\gamma | \gamma_j \in [\alpha_1, \alpha_2]$（$j = 1, 2, \cdots$）$\}$　・・・実行可能な退出政策列の集合

$\hat{\Psi}_t^{\gamma}(x|\tau) = \Pr(x_s^* < \gamma_{s-\tau}(s = \tau+1, \cdots, t-1)$, $x_t^* < \min\{x, \gamma_{t-\tau}\})$

・・・退出政策γに従い，第 t 期まで市場に残っているという条件の下で，$x_t^* \leq x$ となる確率

$\hat{\psi}_t^{\gamma}(x|\tau)$　・・・$\hat{\Psi}_t^{\gamma}(x|\tau)$の密度関数

逐次問題（SP）は次のようになる。

$$\text{(SP)}\quad \underset{\gamma \in \Gamma}{\text{Max}}\ W + \sum_{t=\tau}^{\infty} \beta^{t-\tau} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{\pi(p_t, x) - (1-\beta)W\} \hat{\psi}_t^{\gamma}(x|\tau) dx. \tag{24}$$

最適退出政策 $\gamma_t(t-\tau; p) \in [\alpha_1, \alpha_2]$より，最適退出列 $\gamma(p, \tau) \in \Gamma$となり，実行可能である。したがって，後述の補題１より，$\Psi_t(x|\tau; p)$の密度関数$\psi_t(x|\tau; p)$が存在して，

$$\psi_t(x|\tau; p) = \hat{\psi}_t^{\gamma(p,\tau)}(x|\tau) \tag{25}$$

となる。

$\gamma(p, \tau)$の $j+1$番目の要素（つまり $t = \tau + j$ としたもの）を$\gamma_j(p, \tau)$と書く。これは，市場で j 期間活動している企業の最適退出政策である。$\gamma_j(p, \tau)$が（SP）の解となるための１階の条件は，$\gamma_j(p, \tau) \in [\alpha_1, \alpha_2]$より，

$$\left\{\sum_{t=\tau}^{\infty} \beta^{t-\tau} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{\pi(p_t, x) - (1-\beta)W\} \frac{\partial \psi_t}{\partial \gamma_j}(x|\tau, p) dx\right\}\{\gamma_j - \gamma_j(p, \tau)\} \leq 0,\ \forall \gamma_j \in [\alpha_1, \alpha_2] \tag{26}$$

である[14]。

14) (26)式左辺の最初の{}の式を F とおく。γ_j は$[\alpha_1, \alpha_2]$の任意の値をとるので，$\gamma_j(p, \tau) < \alpha_1$ のとき，$\gamma_j - \gamma_j(p, \tau) > 0$ で，(26)式から $F \leq 0$ となり，端点解$\gamma_j(p, \tau) = \alpha_1$ とする。$\gamma_j(p, \tau) > \alpha_2$ のとき，$\gamma_j - \gamma_j(p, \tau) < 0$ で，(26)式から $F \geq 0$ となり，端点解$\gamma_j(p, \tau) = \alpha_2$ とする。$\gamma_j(p, \tau) \in [\alpha_1, \alpha_2]$ならば，(26)式から $F = 0$ となる。

1.6　中央計画者の最適化問題

l_∞　・・・有界無限列の集合[15)]

$S(Q)$　・・・社会的余剰の割引現在価値

$K(Q)$　・・・総生産量を Q 以上生産するときの最小生産費用の割引現在価値

中央計画者の最適化問題を２段階に分けて考える。まず目標とする総生産量 $Q \in l_\infty$に対する費用最小化問題を解く[16)]。この問題の解とは，総費用が最小となるように，参入企業の測度を決め，さらに，市場で活動している各企業に対して，取るべき退出政策を指示し，生産量の割当を行うものである。次に，最小化された費用汎関数 $K : l_\infty \to \mathbb{R}$を用いて，社会的余剰汎関数 $S : l_\infty \to \mathbb{R}$を計算し，これを最大化する総生産量 $Q \in l_\infty$を求める[17)]。

（Ⅰ）費用最小化問題の解 $s^0 = [\hat{y}^0, \hat{\gamma}^0, \hat{q}^0]$

実行可能政策 $A_1 \times \Gamma^\infty \times A_2{}^\infty$は，次の集合から構成される。

・参入列 $\hat{y} = \{\hat{y}_t\}_{t=0}^{\infty} \in A_1$

$$A_1 = \left\{ \hat{y} \middle| 0 \le \hat{y}_t \le \bar{y}_t, \sum_{t=0}^{\infty} \bar{y}_t < \infty \right\}$$　・・・実行可能な参入列の集合

・退出政策 $\hat{\gamma} = \{\hat{\gamma}(\tau)\}_{\tau=0}^{\infty} \in \Gamma^\infty$

$\hat{\gamma}_j(\tau)$　・・・第τ期に参入し，j 期間市場で活動している企業の退出政策

$\hat{\gamma}(\tau) = \{\hat{\gamma}_j(\tau)\}_{j=1}^{\infty} \in \Gamma$　・・・退出政策列

15)　$l_\infty = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|)$ は有界無限列 $x = \{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ の集合で，ノルム $\|x\| = \sup_t |x_t|$ を持つノルム空間である。

16) 中央計画者は，各企業が入手できる情報の全てを持っているとする。

17) 総費用最小化問題も含めて，中央計画者の最適化問題を「$S(Q)$最大化問題」と呼ぶことにする。

・割当生産量 $\hat{q}=\{\hat{q}_t(x)\}_{t=0}^{\infty}\in A_2^{\infty}$

$\hat{q}_t(x)\in A_2$　・・・第 t 期に $x_t{*}=x$ を持つ企業に対する割当生産量

$A_2=\{\hat{q}_t(x)\,|\,0\le\hat{q}_t(x)\le b(x),\ x\in[\alpha_1,\alpha_2]\}$，$b(x)$はルベーグ可積分な関数[18)]

・・・実行可能な割当生産量の集合

A_1, Γ, A_2は閉区間であるから，コンパクト集合となる。チコノフの定理より[19)]，$\Gamma^{\infty}=\Gamma\times\Gamma\times\cdots$，および $A_2^{\infty}=A_2\times A_2\times\cdots$はコンパクト集合である。ここで，

$$\Omega=A_1\times\Gamma^{\infty}\times A_2^{\infty} \tag{27}$$

とする。チコノフの定理より，Ωはコンパクト集合である。

「総費用＝生産費用＋機会費用＋参入費用」であるから，総費用汎関数$f:\Omega\to\mathbb{R}$は以下のように表される[20)]。

$$f(s)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left\{\sum_{\tau=0}^{t}\hat{y}_\tau\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\{c(\hat{q}_t(x))x+(1-\beta)W\}\hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}(\tau)}(x\,|\,\tau)dx+ky_t\right\}. \tag{28}$$

制約汎関数 $G_t:\Omega\times l_\infty\to\mathbb{R}$を次のように定義する。

$$G_t(s,Q_t)=-\sum_{\tau=0}^{t}\hat{y}_\tau\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\hat{q}_t(x)\hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}(\tau)}(x\,|\,\tau)dx+Q_t\,. \tag{29}$$

さらに，関数 G_t の列

$$G(s,Q)=\{G_t(s,Q_t)\}_{t=0}^{\infty} \tag{30}$$

を考える。$Q_t,\hat{y}_t,\hat{q}_t$ は有界なので，G_tは有界となり，

$$G:\Omega\times l_\infty\to l_\infty. \tag{31}$$

・総費用最小化問題

$$K(Q)=\inf_{s\in\Omega}f(s)\quad \text{s. t. } G(s,Q)\le\boldsymbol{o}^{21)} \tag{32}$$

---

18) このとき，すべての $x\in[\alpha_1,\alpha_2]$について，$\hat{q}_t(x)$ はルベーグ可積分となる。

19) コンパクト集合のカルテシアン積はコンパクト集合である。

20) Wは当該市場に残るときの機会費用となる。つまり，市場から退出して，他の事業へ投資するときに得られる最大の割引現在価値が Wである。$(1-\beta)W$は１期間当たりの価値である。

21) $\boldsymbol{o}=(0, 0, \cdots)$である。

汎関数の微分概念であるガトー微分を定義する。変分$(s^1 - s^0)$，$s^0, s^1 \in \Omega$について，Ωは凸集合なので[22)]，$\alpha \in [0, 1]$に対して，

$$s^0 + \alpha(s^1 - s^0) = (1 - \alpha)s^0 + \alpha s^1 \in \Omega \tag{33}$$

である。fのs^0における$(s^1 - s^0)$方向へのガトー微分$\delta f : \Omega \to \mathbb{R}$を，

$$\delta f(s^0; s^1) = \left.\frac{df(s^0 + \alpha(s^1 - s^0))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \tag{34}$$

また，Gのs^0における$(s^1 - s^0)$方向へのガトー微分$\delta G : \Omega \times l_\infty \to \mathbb{R}$を，

$$\delta G(s^0, Q; s^1) = \left.\frac{dG(s^0 + \alpha(s^1 - s^0), Q)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \tag{35}$$

とそれぞれ定義する。さらに，

$$\delta G(s^0, Q; s^1) = \{\delta G_t(s^0, Q_t; s^1)\}_{t=0}^{\infty} \tag{36}$$

とする。

費用最小化解を$s^0 = [\hat{y}^0, \hat{\gamma}^0, \hat{q}^0]$とする。$s^0$は，ラグランジュ関数

$$L(s, \lambda^*) = f(s) + \lambda^*(G(s, Q)) \tag{37}$$

を最小化する（補題６）。ただし，λ^*は線形汎関数である。そのための条件は，

$$\delta f(s^0; s) + \lambda^*(\delta G(s^0, Q; s)) \geq 0, \quad \forall s \in \Omega \tag{38}$$

$$\lambda^* \geq 0 \tag{39}$$

$$\lambda^*(G(s^0, Q)) = 0 \tag{40}$$

である（補題４）。(34), (35)式を$s = y, q, \gamma$として計算すると，上の３式から以下の条件が導かれ，これらが費用最小化の１階の条件となる[23)]。

$$\lambda_t^* = \beta^t c'(\hat{q}_t^0(x))x > 0 \quad (t = 0, 1, \cdots) \tag{41}$$

$$\sum_{j=t}^{\infty}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\{\beta^j[c(\hat{q}_j^0(x))x + (1-\beta)W] - \lambda_j^*\hat{q}_j^0(x)\}\hat{\psi}_j^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x|t)dx + \beta^t k \begin{smallmatrix}\geq\\=\end{smallmatrix} 0, \quad y_t^0 \begin{smallmatrix}=\\>\end{smallmatrix} 0 \text{（複号同順）} \tag{42}$$

---

22) A_1, A_2, Γは実数の閉区間であるから凸集合である。凸集合のカルテシアン積は凸集合となる。

23) (39), (40)式より，$\lambda^* > 0$のとき，$G(s^0, Q) = \boldsymbol{o}$となる。

$$\left\{\sum_{j=\tau+i}^{\infty}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\{\beta^j[c(\hat{q}_j^0(x))x+(1-\beta)W]-\lambda_j*\hat{q}_j^0(x)\}\frac{\partial\hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}}{\partial\hat{\gamma}_i(\tau)}(x|\tau)dx\right\}\hat{y}_\tau^0\{\hat{\gamma}_i^1(\tau)-\hat{\gamma}_i^0(\tau)\}\geq 0,\quad \forall\hat{\gamma}_i^1(\tau). \tag{43}$$

補題２より, 費用最小化問題の解が存在するので, $K(Q)$は曖昧なく定義され, 補題７より $K(Q)$は凸関数，かつ各 Q_t について微分可能であることが示される。さらに，補題７より，次の関係を得る。

$$\frac{\partial K}{\partial Q_t}=\beta^t c'(\hat{q}_t^0(x))x>0\cdot \tag{44}$$

（Ⅱ）社会的余剰最大化問題の解 $\{Q_t*\}_{t=0}^{\infty}$

$Q*$　・・・$S(Q)$を最大にする Q

$\hat{q}_t*(x)$　・・・$Q=Q*$のとき，fを最小化する（$K(Q*)$を達成する）$\hat{q}_t$

$\hat{\gamma}*(\tau)$　・・・$Q=Q*$のとき，fを最小化する（$K(Q*)$を達成する）$\hat{\gamma}(\tau)$

社会的余剰の割引現在価値は,

$$S(Q)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\int_0^{Q_t}D_t(z)dz-K(Q) \tag{45}$$

となる。仮定 D-2より，十分小さな Q_t に対して,

$$\frac{\partial K}{\partial Q_t}=\lambda_t*\leq\overline{\lambda}<D_t(\varepsilon) \tag{46}$$

となるから,「社会的限界便益＞社会的限界費用」となる。これより，最適解 Q_t*は0で下に有界となる。仮定 D-3より，社会的便益は Q_t について上に有界となる。一方, K は Q_t の増加関数である。したがって，十分大きな Q_t に対しては,「社会的限界便益＜社会的限界費用」となる。このことから，実行可能な Q_t の集合は，コンパクト集合に限定しても構わない。

社会的余剰最大化の１階の条件は，次のようになる。

$$\frac{\partial S}{\partial Q_t}=\beta^t D_t(Q_t)-\frac{\partial K}{\partial Q_t}=0\cdot \tag{47}$$

ゆえに，最適化解 $\{Q_t*\}_{t=0}^{\infty}$ では,

$$\beta^t D_t(Q_t^*) = \lambda_t^* \quad (t = 0, 1, \cdots) \tag{48}$$

が満たされる。

仮定 D-1および K は凸関数であることから，２階の条件

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Q_t^{\ 2}} = \beta^t D_t'(Q_t) - \frac{\partial^2 K}{\partial Q_t^{\ 2}} < 0 \tag{49}$$

が満たされる。以上より，$S(Q)$を最大化する有界な列$\{Q_t^*\}$が存在して，それは一意となる。

（Ⅲ）市場均衡と $S(Q)$最大化解の一致

市場均衡条件を満たす均衡価格列 $\tilde{p} = \{\tilde{p}_t\}_{t=0}^{\infty}$，および均衡参入列 $\tilde{y} = \{\tilde{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ について，

$$\tilde{p}_t = \beta^{-t} \lambda_t^* \tag{50}$$

と置くことで，

$$Q_t^* = Q_t(\tilde{p}, \tilde{y}) \tag{51}$$

$$\hat{q}_t^*(x) = q(\tilde{p}_t \mid x) \tag{52}$$

$$\hat{\gamma}^*(\tau) = \gamma(\tilde{p}, \tau) \tag{53}$$

となり，$Q_t^*, \hat{q}_t^*, \hat{\gamma}^*$ は市場均衡条件を満たす。また，$\{Q_t(\tilde{p}, \tilde{y})\}_{t=0}^{\infty}$ は社会的余剰 $S(Q)$を最大化し，$[\tilde{y}, \gamma(\tilde{p}, \tau), \{q(\tilde{p}_t \mid x)\}_{t=0}^{\infty}]$ は最小総費用 $K(Q^*)$を達成する。したがって，市場均衡は $S(Q)$最大化を達成し，逆に，$S(Q)$最大化解は市場均衡にもなっている（定理２）。

２．定理と補題の証明

定理１（評価関数の存在・一意性・有界性・連続性・単調性）

ベルマン方程式(10)の解を V とする。このとき，

ｉ）解 V は存在して，一意・有界・連続である。

ⅱ）V は x の減少関数である。

証明

状態変数$\sigma = (x, n)$と置いて，σが定義される空間をΣ，およびΣ上の有界連続関数空間を $C(\Sigma)$とする。$v(\sigma) \in C(\Sigma)$に対して，作用素 T を，

$$Tv(\sigma) = \pi(\sigma) + \beta \int \mathrm{Max}\{W, v(\sigma')\} P(d\sigma' \mid \sigma) \tag{54}$$

と定義する。このとき，解 V は T の不動点 $V = TV$ である。

ⅰ）の証明：次の⑴～⑶が成り立つことを示す。

（1）$T : C(\Sigma) \to C(\Sigma)$

Tv が有界連続関数であることを示す。

・有界性について

$$p_t < \infty \tag{55}$$

$$x_t^* \geq \alpha_1 > 0 \tag{56}$$

$$\lim_{q \to \infty} c'(q) = \infty \tag{57}$$

であるから，利潤最大化の１階の条件

$$\frac{d\pi}{dq_t} = p_t - c'(q_t) x_t^* = 0 \tag{58}$$

は有界の q_t についてのみ満たされる。ゆえに，利潤関数$\pi(p_t, x_t^*) = \pi(\sigma)$は有界である。以上から，$Tv$ は有界である。

・連続性について

$\pi(\sigma)$と $P(d\sigma' \mid \sigma)$はσの連続関数なので，$Tv(\sigma)$もσの連続関数である。

（2）T の単調性

$v_1 \geq v_2$なる $v_1, v_2 \in C(\Sigma)$に対して，

$$\int v_1(\sigma') P(d\sigma' \mid \sigma) \geq \int v_2(\sigma') P(d\sigma' \mid \sigma) \tag{59}$$

であるから，

$Tv_1 \geq Tv_2$（単調性）. (60)

（3）T の割引性

定数 $a > 0$に対して，

$$T(v(\sigma)+a) = \pi(\sigma) + \beta\int \mathrm{Max}\{W, v(\sigma')+a\}P(d\sigma' \mid \sigma)\,. \tag{61}$$

これは，次のように場合分けできる。

$$T(v(\sigma)+a) = \begin{cases} \pi(\sigma) + \beta\int \{v(\sigma')+a\}P(d\sigma' \mid \sigma) = Tv(\sigma) + \beta a & (v > W\text{のとき}) \\ \pi(\sigma) + \beta\int WP(d\sigma' \mid \sigma) = Tv(\sigma) < Tv(\sigma) + \beta a & (W \geq v\text{とき}) \end{cases} \tag{62}$$

これより，

$T(v + a) \leq Tv + \beta a$（割引性）. (63)

以上(1)～(3)より，T はブラックウェルの十分条件を満たすので，T はモジュールβの縮小写像となる。縮小写像定理より，一意の不動点 V が存在して，さらに $V \in C(\Sigma)$となるから，V は有界かつ連続である。

ⅱ）の証明：

$T^n v = T(T^{n-1})v$ (64)

と定義する。T は縮小写像なので，任意の $v \in C(\Sigma)$に対して，

$$V = \lim_{n\to\infty} T^n v \tag{65}$$

が成立する。各 $T^n v$（$n = 0, 1, \cdots$）について成立する単調性は，極限関数 V でも弱く保持される[24)]。いま，v がσの減少関数のとき，Tv もσの減少関数であることが示されたとする。そうすれば，$T^n v$ ($n = 2, 3, \cdots$) もσの減少関数となるから，その極限である V はσの非増加関数となる。

そこで，$v(\sigma')$をσ'の減少関数とすると，$\mathrm{Max}\{W, v(\sigma')\}$も$\sigma'$の減少関数となる。さらに，$P(\sigma'|\sigma)$は$\sigma$の増加関数であるから，$\beta\int \mathrm{Max}\{W, v(\sigma')\}P(d\sigma' \mid \sigma)$ はσの減

24) $C'(\Sigma)$を非増加関数空間，$C''(\Sigma)$を減少関数空間とする。無論，$C''(\Sigma) \subseteq C'(\Sigma)$である。$T : C(\Sigma) \to C(\Sigma)$について，$C(\Sigma)$の閉部分集合 $C'(\Sigma)$が $T(C'(\Sigma)) \subseteq C'(\Sigma)$ならば，$V \in C'(\Sigma)$となる。$T$ は縮小写像なので，これは成り立つ。しかし，$V \in C''(\Sigma)$が成立するのは，$T(C'(\Sigma)) \subseteq C''(\Sigma)$となるときに限る。

少関数となる[25)]。また，πは x_t*の減少関数，すなわちσの減少関数である。したがって，(54)式より，Tv はσの減少関数となる。$T^n v$（$n = 2, 3, \cdots$）もσの減少関数であり，その極限である $V(\sigma)$はσの非増加関数となる。したがって，$V(\sigma')$はσ'の非増加関数であるので，$\beta\int \mathrm{Max}\{W, V(\sigma')\}P(d\sigma' \mid \sigma)$ もσの非増加関数となる。$\pi(\sigma)$はσの減少関数であるから，

$$TV(\sigma) = \pi(\sigma) + \beta\int \mathrm{Max}\{W, V(\sigma')\}P(d\sigma' \mid \sigma) \tag{66}$$

はσの減少関数となる。$V = TV$ であるから，V はσの減少関数，つまり，x の減少関数である。

証明終

補題１（密度関数の存在）

任意のγ，任意の t（$> \tau$），任意の $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$に対して，密度関数

$$\hat{\psi}_t^{\gamma}(x \mid \tau) = \frac{\partial \hat{\Psi}_t^{\gamma}(x \mid \tau)}{\partial x} \tag{67}$$

は存在し，各γ_j（$j = 1, 2, \cdots$）で微分可能である。

証明

$$\hat{\Psi}_t^{\gamma}(x \mid \tau) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} H(\min\{x, \gamma_{t-\tau}\} \mid z, (t-1)-\tau)\hat{\Psi}_{t-1}^{\gamma}(dz \mid \tau) \tag{68}$$

とする。ここで，$H(x \mid z, n)$は，十分統計量 $x_{t-1}^* = z$，$n = (t-1) - \tau$が与えられたとき，$x_t^* \le x$ となる確率である。この関数は，第 $t-1$期の分布関数$\hat{\Psi}_{t-1}^{\gamma}$ から，第 t 期の分布関数$\hat{\Psi}_t^{\gamma}$ を導く推移関数となる。

（1）密度関数$\hat{\psi}_t^{\gamma}$の存在について

密度関数が存在するためには，$\hat{\Psi}_t^{\gamma}$ が x について連続微分可能であることを示せばよい。H は正規分布に従う分布関数であるから，連続関数であり，かつ $x \in$

25) σが大きいとき，より大きなσ'が実現する確率が高くなる。したがって，より小さな v の値が実現する確率が高くなる。

(α_1, α_2)で連続微分可能である。(68)式より，$\hat{\Psi}_{t-1}^{\gamma}$が連続関数ならば，$\hat{\Psi}_{t}^{\gamma}$は連続微分可能となる。

$t=\tau+1$について，(68)式は，

$$\hat{\Psi}_{\tau+1}^{\gamma}(x\,|\,\tau)=\begin{cases}H(\min\{x,\gamma_1\}\,|\,x_0,0) & (x_0<\gamma_0\text{のとき})\\ 0 & (x_0\geq\gamma_0\text{のとき})\end{cases} \tag{69}$$

となるので，$x_0=\gamma_0$を除く点について，$\hat{\Psi}_{\tau+1}^{\gamma}$は連続関数である。これを起点として，(68)式から$t=\tau+2, \tau+3, \cdots$と帰納的に考えていくと，すべての$t>\tau$について，$x=\gamma_{t-\tau}$を除く点で，$\hat{\Psi}_{t}^{\gamma}$は連続関数である。以上より，密度関数$\hat{\psi}_{t}^{\gamma}$は存在して，区分的連続である[26)]。

（2）密度関数$\hat{\psi}_{t}^{\gamma}$の微分可能性について

$t=\tau+2$のとき，(68)式をxで偏微分すると，

$$\hat{\psi}_{\tau+2}^{\gamma}(x\,|\,\tau)=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}H_x(\min\{x,\gamma_2\}\,|\,z,1)\hat{\psi}_{\tau+1}^{\gamma}(z\,|\,\tau)dz \tag{70}$$

となる。(69)式より，$\hat{\psi}_{\tau+1}^{\gamma}$は$\gamma_1$について微分可能であり，また$H_x$は$\gamma_2$について微分可能であるから，$\hat{\psi}_{\tau+2}^{\gamma}$は$\gamma_1, \gamma_2$について微分可能となる。これを起点として，$t=\tau+3, \tau+4, \cdots$と帰納的に考えると，次のようになる。

$t=\tau+j$として，$\hat{\psi}_{\tau+j}^{\gamma}$が$\gamma_1, \cdots, \gamma_j$について微分可能であることを示す。

$$\hat{\psi}_{\tau+j}^{\gamma}(x\,|\,\tau)=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}H_x(\min\{x,\gamma_j\}\,|\,z,\tau+j-1)\hat{\psi}_{\tau+j-1}^{\gamma}(z\,|\,\tau)dz \tag{71}$$

であり，$\hat{\psi}_{\tau+j-1}^{\gamma}(z\,|\,\tau)$は$j-1$期間市場で活動している企業の退出決定を考慮に入れたものなので，$\gamma_1, \cdots, \gamma_{j-1}$のみに依存し，$\gamma_j$には依存しない。また，$\hat{\psi}_{\tau+j-1}^{\gamma}$は$\gamma_1, \cdots, \gamma_{j-1}$について微分可能であることが帰納的に示される。さらに，H_xはγ_jのみに依存し，そしてγ_jについて微分可能である。したがって，$\hat{\psi}_{\tau+j}^{\gamma}$は$\gamma_1, \cdots, \gamma_j$について微分可能である。以上より，$\hat{\psi}_{t}^{\gamma}$が$\gamma_j$（$j=1, 2, \cdots$）で微分可能であることが示された。

証明終

---

26) 区分的連続とは，有限個の点を除いて連続となっている関数である。密度関数は，$x>\gamma_{t-\tau}$で不連続にゼロとなる。

補題２（$K(Q)$は曖昧なく定義される）

$$K(Q)=\inf_{s\in\Omega} f(s) \quad \text{s. t. } G(s,Q)\le \boldsymbol{o} \tag{32}$$

の解がΩ上に存在する。

証明

制約式を満たすsの集合を

$$\Omega(Q)=\{s|\ G(s,Q)\le \boldsymbol{o}\}\subseteq \Omega \tag{72}$$

とする。Ωはコンパクト集合なので，Ωにおける任意の点列は収束する部分列を持つ。つまり，点列$\{s^i\}_{i=0}^{\infty}\in\Omega$は，ある点$s^0 \in \Omega$に弱収束する[27)]。そこで，$s^0=[\hat{y}^0,\hat{\gamma}^0,\hat{q}^0]$，$s^1=[\hat{y}^1,\hat{\gamma}^1,\hat{q}^1]$として，$s^1\to s^0$とする。つまり，各$t=0, 1, \cdots$に対して，

$$\hat{y}_t^1\to\hat{y}_t^0 \tag{73}$$

$$\hat{q}_t^1(x)\to\hat{q}_t^0(x) \tag{74}$$

（ただし，ルベーグ測度ゼロの集合上の$\hat{q}_t^1(x)$を除く）

$$\hat{\gamma}_j^1(\tau)\to\hat{\gamma}_j^0(\tau)\quad (j=1,\cdots,t-\tau) \tag{75}$$

となる。以下では，次の(1) (2)を証明する。

(1) fは$\Omega(Q)$上で連続

背理法で証明する。fはs^0で不連続とする。すなわち，

$$\left|f(s^1)-f(s^0)\right|\to\delta>0\quad (s^1\to s^0) \tag{76}$$

となる。fを次のように表す。

$$f(s)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t f_t(s) \tag{77}$$

27) 確率変数$\hat{q}_t^1(x)$の分布関数は，確率変数$\hat{q}_t^0(x)$の分布関数に収束する。

$$f_t(s)=\sum_{\tau=0}^{t}\hat{y}_\tau\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\{c(\hat{q}_t(x))x+(1-\beta)W\}\hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}(\tau)}(x\,|\,\tau)dx+k\hat{y}_t\cdot \tag{78}$$

$\hat{y}_t,\hat{q}_t,\hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}(\tau)}$はすべて有界であるので，$\{f_t(s)\}_{t=0}^{\infty}$は$\Omega$上で有界である。したがって，

$$\sum_{t=T(\delta)}^{\infty}\beta^t\left|f_t(s^1)-f_t(s^0)\right|<\frac{\delta}{2},\quad \forall s^1\in\Omega \tag{79}$$

なる$T(\delta)$が存在する。これより，

$$\left|f(s^1)-f(s^0)\right|=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left|f_t(s^1)-f_t(s^0)\right|\le\sum_{t=0}^{T(\delta)-1}\beta^t\left|f_t(s^1)-f_t(s^0)\right|+\frac{\delta}{2}$$

$$\le T(\delta)\max_{0\le t\le T(\delta)-1}\left|f_t(s^1)-f_t(s^0)\right|+\frac{\delta}{2}\cdot \tag{80}$$

補題１より，$\hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}(\tau)}(x\,|\,\tau)$は$\hat{\gamma}_j$（$j=1,\cdots,t-\tau$）のみに依存し，かつ$\hat{\gamma}_j$（$j=1,\cdots,t-\tau$）について連続である。したがって，各$t>\tau$に対して，

$$\hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^1(\tau)}\to\hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}>0\quad(s^1\to s^0) \tag{81}$$

である。(73)，(74)，(75)，(81)式より，次式が満たされる。

$$\left|f_t(s^1)-f_t(s^0)\right|\to 0\quad(s^1\to s^0). \tag{82}$$

これより，(80)式は次のようになる。

$$\left|f(s^1)-f(s^0)\right|\to\frac{\delta}{2}\quad(s^1\to s^0). \tag{83}$$

これは(76)式に矛盾する。したがって，fはΩ上で連続でなければならない。

（2）$\Omega(Q)$はコンパクト集合

コンパクト集合Ωの閉部分集合はコンパクト集合なので[28]，$\Omega(Q)$が閉集合ならば，$\Omega(Q)$はコンパクト集合となる。そこで，$\Omega(Q)$の補集合

28) コンパクト集合Ωの閉部分集合Fに対する開被覆を$\{U_\lambda\}_\lambda$とする。$U=F^C$は開集合である。したがって，$\{\{U_\lambda\}_\lambda, U\}$は$\Omega$の開被覆となる。$\Omega$はコンパクト集合なので，有限個の開被覆$U_1,\cdots,U_n$が存在して，

$$\Omega=U_1\cup\cdots\cup U_n\cup U.$$

とすることができる。$U=\Omega\setminus F$かつ$U\subset\Omega$なので，

$$F\subset U_1\cup\cdots\cup U_n.$$

よって，$\{U_1,\cdots,U_n\}$はFの開被覆となるので，Fはコンパクト集合である。

$$(\Omega(Q))^C = \{s|\ G(s, Q) > \boldsymbol{o}\} \tag{84}$$

が開集合であることを示す。そのためには，$s^0 \in (\Omega(Q))^C$ に対して，

$$G(s, Q) > \boldsymbol{o},\quad \forall s \in N(s^0) \tag{85}$$

なる s^0の近傍 $N(s^0)$が存在することを示せばよい。ここで，

$$G_t(s, Q_t) = -\sum_{i=0}^{t} \hat{y}_i z_i + Q_t\,,\quad z_i = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \hat{q}_t(x)\hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}(i)}(x\,|\,i)dx \tag{86}$$

とすると，

$$G_t(s, Q_t) - G_t(s^0, Q_t) = -\sum_{i=0}^{t} \hat{y}_i(z_i - z_i^0) - \sum_{i=0}^{t} (\hat{y}_i - \hat{y}_i^0) z_i^0\,,\quad \forall s \in \Omega \tag{87}$$

となる。$\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ は有界なので，

$$\sum_{i=0}^{t} \hat{y}_i < \infty\,,\quad \hat{y}_i \geq 0\,. \tag{88}$$

よって，

$$\sum_{t=T}^{\infty} \hat{y}_t \to 0\quad (T \to \infty). \tag{89}$$

これと $\{z_t\}_{t=0}^{\infty}$ が有界であることを考慮に入れると，任意のδに対して，

$$\sum_{i=T(\delta)}^{t} \hat{y}_i \left| z_i - z_i^0 \right| + \sum_{i=T(\delta)}^{t} \left| \hat{y}_i - \hat{y}_i^0 \right| z_i^0 < \frac{\delta}{2}\,,\quad \forall t \geq T(\delta) \tag{90}$$

なる十分大きな $T = T(\delta)$を選ぶことができる。したがって，(87)式から，任意の $t \geq T(\delta)$に対して，

$$\begin{aligned} \left| G_t(s, Q_t) - G_t(s^0, Q_t) \right| &\leq \sum_{i=0}^{T(\delta)-1} \left\{ \hat{y}_i \left| z_i - z_i^0 \right| + \left| \hat{y}_i - \hat{y}_i^0 \right| z_i^0 \right\} + \frac{\delta}{2} \\ &\leq T(\delta)\left(c_1 \operatorname*{Max}_{0 \leq i \leq T(\delta)-1} \left| z_i - z_i^0 \right| + c_2 \operatorname*{Max}_{0 \leq i \leq T(\delta)-1} \left| \hat{y}_i - \hat{y}_i^0 \right| \right) + \frac{\delta}{2} \end{aligned} \tag{91}$$

となる。ここで，c_1は $\hat{y}_i$ の上限，c_2は z_i の上限とする。

$$\left| z_i - z_i^0 \right| \to 0\quad (s \to s^0) \tag{92}$$

$$\left| \hat{y}_i - \hat{y}_i^0 \right| \to 0\quad (s \to s^0) \tag{93}$$

であるので，

$$\left|G_t(s,Q_t)-G_t(s^0,Q_t)\right|\to\frac{\delta}{2}\quad(s\to s^0). \tag{94}$$

これが任意のδについて成り立つので，

$$G_t(s, Q_t)\to G_t(s^0, Q_t)\quad(t=0, 1, \cdots). \tag{95}$$

したがって，

$$G(s, Q)\to G(s^0, Q)\quad(s\to s^0). \tag{96}$$

つまり，G は s^0において連続関数となる。

　G は s^0において連続関数であるから，$G(s^0, Q)$の任意の近傍 U に対して，s^0 の近傍 $N(s^0)$を選び，

$$G(N(s^0), Q)\subset U \tag{97}$$

とすることができる。$G(s^0, Q)$の近傍 U では $G>0$となっているので，(85)式が成り立つ。また，$G(s^0, Q)>\boldsymbol{o}$ より，$s^0\in\{s|\ G(s, Q)>\boldsymbol{o}\}$である。以上の議論から，$\{s|\ G(s, Q)>\boldsymbol{o}\}$は開集合となる。したがって，$\Omega(Q)$は閉集合である。

　コンパクト集合上で定義される連続関数は下限を持つので，（1），（2）より補題は証明された。

証明終

　正則点を次のように定義する。

$$G(s^0, Q)\le\boldsymbol{o} \tag{98}$$

ならば，

$$G(s^0, Q)+\delta G(s^0, Q; s)<\boldsymbol{o} \tag{99}$$

なる $s\in\Omega$が存在するとき，s^0を $G(s, Q)\le\boldsymbol{o}$ の正則点と呼ぶ[29]。

29) 正則点の条件は，特異点の１つであるところの尖点を排除するものである。尖点 s^0 とは，$\delta G(s^0, Q; s)=0$ で，$\delta G(s^0, Q; s)$の要素の１つが s^0 を境として符号を変える。つまり，尖点 s^0 の前後で，曲線の方向が逆になっている。正則点で最小解を達成することが，この問題の制約想定となる。

補題３（費用最小化解は正則点である）

総費用最小化問題の解

$$s^0 = \arg\min_{s \in \Omega} f(s) \quad \text{s. t. } G(s, Q) \leq \boldsymbol{o} \tag{100}$$

について，$Q_t > 0$（$t = 0, 1, \cdots$）ならば，s^0は正則点である。

証明

$\hat{y}^0 \neq \hat{y}^1$ 以外の要素は，すべて $s^1 = s^0$となる $s^0, s^1 \in \Omega$を考える。つまり，$s^0 = [\hat{y}^0, \hat{\gamma}^0, \hat{q}^0]$，$s^1 = [\hat{y}^1, \hat{\gamma}^0, \hat{q}^0]$である。すると，

$$\delta G_t(s^0, Q_t; s^1) = -\sum_{\tau=0}^{t} (\hat{y}_\tau^1 - \hat{y}_\tau^0) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \hat{q}_t^0(x) \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x \mid \tau) dx \cdot \tag{101}$$

$G_t(s^0, Q_t) \leq 0$であることから，s^0が正則点となるためには，ある $s^1 \in \Omega$について，$\delta G_t(s^0, Q_t; s^1) < 0$（$t = 0, 1, \cdots$）となることを示せばよい。$G_t < 0$かつ $Q_t > 0$より，

$$\sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_\tau^0 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \hat{q}_t^0(x) \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x \mid \tau) dx > 0 \quad (t = 0, 1, \cdots). \tag{102}$$

ここで $\hat{y}_1$ を，

$$\hat{y}_\tau^1 - \hat{y}_\tau^0 = \alpha \hat{y}_\tau^0, \quad \alpha > 0 \tag{103}$$

と定める。$\sum_{\tau=0}^{\infty} \hat{y}_\tau^0 < \infty$ なので，

$$(1+\alpha) \sum_{\tau=0}^{\infty} \hat{y}_\tau^0 = \sum_{\tau=0}^{\infty} \hat{y}_\tau^1 < \infty \tag{104}$$

である。よって，$s^1 \in \Omega$である。

(101)式は，

$$\delta G_t(s^0, Q_t; s^1) = -\sum_{\tau=0}^{t} \alpha \hat{y}_\tau^0 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \hat{q}_t^0(x) \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x \mid \tau) dx < 0 \quad (t = 0, 1, \cdots) \tag{105}$$

となるので，s^0が正則点であることが示された。

証明終

l_∞の双対空間をl_∞^*とする。すなわち，l_∞^*はl_∞上の有界な線形汎関数の空間である。線形汎関数$\lambda \in l_\infty^*$に対して，$z \in l_\infty$における値を$\lambda(z)$と表す。

補題４（線形汎関数λ^*の存在）

総費用最小化問題の解

$$s^0 = \arg\min_{s \in \Omega} f(s) \qquad \text{s. t. } G(s, Q) \le \boldsymbol{o} \tag{100}$$

に対して，線形汎関数$\lambda^* \in l_\infty^*$が存在して，$Q > 0$ならば，次式が満たされる。

$$\delta f(s^0; s) + \lambda^*(\delta G(s^0, Q; s)) \ge 0, \quad \forall s \in \Omega \tag{38}$$

$$\lambda^* \ge 0 \tag{39}$$

$$\lambda^*(G(s^0, Q)) = 0. \tag{40}$$

証明

$$A = \{(r, z) | \, r \ge \delta f(s^0; s), \quad z \ge G(s^0, Q) + \delta G(s^0, Q; s)\} \tag{106}$$

$$B = \{(r, z) | \, r \le 0, \quad z \le \boldsymbol{o}\} \tag{107}$$

とする。Aは$(\delta f(s^0; s), G(s^0, Q) + \delta G(s^0, Q; s))$を頂点とし，$B$は原点を頂点とする$l_\infty$の凸錐である[30)]。$l_\infty$の正錐$P$は内点を含むので[31)]，負錐$N = -P$も内点を含む。したがって，$B$は内点$r < 0$，$z < \boldsymbol{o}$を含む。ここで，以下の補題を示す。

補題４′ AはBに属するどの内点も含まない。

補題４′の証明

もし，AがBの内点を含むならば，$r < 0$，$z < \boldsymbol{o}$に対して$(r, z) \in A$であるから，

---

30) 凸錐Cとは凸集合となる錐である。つまり，

$$x, y \in C, \quad \alpha, \beta \ge 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in C.$$

31) ノルム空間において，正錐とは閉凸錐$P = \{x \in C | \, x \ge \boldsymbol{o}\}$であり，その内点とは，正錐$P$に含まれる最大の開集合に属する点である。したがって，有界かつ厳密に正（0 で下に有界）の列$x > \boldsymbol{o}$のうち，凸錐Cに含まれるものは，すべて正錐Pの内点となる。

$$\delta f(s^0; s) < 0 \tag{108}$$

$$G(s^0, Q) + \delta G(s^0, Q; s) < \boldsymbol{o} \tag{99}$$

なる s が存在する。

(99)式より，$z' = G(s^0, Q) + \delta G(s^0, Q; s)$は B の内点なので，l_∞の負錐 N に含まれるある開球が存在し，点 $G(s^0, Q) + \delta G(s^0, Q; s)$はその中心となる。この開球の半径を$\rho$とする。このとき，内点$\alpha z' = \alpha\{G(s^0, Q) + \delta G(s^0, Q; s)\}$，$0 < \alpha < 1$は，$l_\infty$の負錐 N に含まれる半径$\alpha\rho$の開球の中心となる。さらに，制約式から $G(s^0, Q) \leq \boldsymbol{o}$ であるから，この点も l_∞の負錐 N に含まれる。これより，B に属する２点 $G(s^0, Q)$，$G(s^0, Q) + \delta G(s^0, Q; s)$の凸結合

$$(1 - \alpha)G(s^0, Q) + \alpha\{G(s^0, Q) + \delta G(s^0, Q; s)\} = G(s^0, Q) + \alpha\delta G(s^0, Q; s) \tag{109}$$

も負錐 N に含まれる。この凸結合も, l_∞の負錐 N に含まれる開球の中心となる。

ガトー微分の定義より，十分小さなαについて，

$$\frac{G(s^0 + \alpha(s - s^0), Q) - G(s^0, Q)}{\alpha} = \delta G(s^0, Q; s) \tag{110}$$

が成り立つ。これは,

$$\left\| G(s^0 + \alpha(s - s^0), Q) - G(s^0, Q) - \alpha\delta G(s^0, Q; s) \right\| = o(\alpha) \tag{111}$$

を意味するので，αが十分小さいとき，点 $G(s^0 + \alpha(s - s^0), Q)$は，中心 $G(s^0, Q) + \alpha\delta G(s^0, Q; s)$の開球に含まれる。ゆえに，この点は B の内点となり,

$$G(s^0 + \alpha(s - s^0), Q) < \boldsymbol{o} \tag{112}$$

が成立する。したがって，変分 $s^0 + \alpha(s - s^0)$は制約を満たす。

さらに，(108)式より,

$$\delta f(s^0; s) = \left.\frac{f(s^0 + \alpha(s - s^0)) - f(s^0)}{\alpha}\right|_{\alpha=0} < 0 \tag{113}$$

なので，十分小さいαに対して,

$$f(s^0 + \alpha(s - s^0)) < f(s^0). \tag{114}$$

(112)，(114)式より，s^0が最小化解であることに反する。したがって，A は B の内点を含むことはない。これにより，$(r, z) \in A$ のときは必ず $r \geq 0$，$z \geq \boldsymbol{o}$ となる。

補題４′の証明終

補題４′から，A, B に対してハーン＝バナッハの定理が適用でき[32)]，

$$r_0 r + \langle z, \lambda^* \rangle \geq \delta, \quad \forall (r, z) \in A \tag{115}$$

$$r_0 r + \langle z, \lambda^* \rangle \leq \delta, \quad \forall (r, z) \in B \tag{116}$$

なる r_0, λ^*, δ が存在する。ここで，$\lambda^*(z) = \langle z, \lambda^* \rangle$である。$(0, \boldsymbol{o}) \in A$，$(0, \boldsymbol{o}) \in B$ より，$\delta = 0$となる。任意の$(r, z) \in B$ に対して，$r \leq 0$，$z \leq \boldsymbol{o}$ であるから，(116)式より，$r_0 \geq 0$，$\lambda^* \geq 0$となる。後者の式は(39)式である。

補題３より s^0は正則点となるので，

$$G(s^0, Q) + \delta G(s^0, Q; s) < \boldsymbol{o} \tag{99}$$

なる s が存在する。このことから，$r_0 = 0$ではないので[33)]，(115), (116)式の両辺を r_0で割り，$r_0 = 1$としてもよい。$r = \delta f(s^0; s)$，$z = G(s^0, Q) + \delta G(s^0, Q; s)$なる$(r, z)$についても，(115)式が成り立つので，

$$\delta f(s^0; s) + \langle G(s^0, Q) + \delta G(s^0, Q; s), \lambda^* \rangle \geq 0, \quad \forall s \in \Omega. \tag{117}$$

$s = s^0$のとき，$\delta f(s^0; s) = 0$，$\delta G(s^0, Q; s) = \boldsymbol{o}$ となるから，

$$\langle G(s^0, Q), \lambda^* \rangle \geq 0. \tag{118}$$

一方，$G(s^0, Q) \leq \boldsymbol{o}$，$\lambda^* \geq 0$より，

$$\langle G(s^0, Q), \lambda^* \rangle \leq 0. \tag{119}$$

---

32) ハーン＝バナッハの定理とは，次のようなものである。K_1, K_2 を X の凸集合とし，K_1 は内点を含み，K_2 は K_1 の内点を含まないものとする。このとき，K_1, K_2 を分離する閉超平面が存在する。すなわち，

$$\sup_{x \in K_1} \langle x, x^* \rangle \leq \inf_{x \in K_2} \langle x, x^* \rangle$$

なる x^*が存在する。

33) $r_0 = 0$ のとき，(115), (116)式より，$\langle z, \lambda^* \rangle = 0$ となり，$\lambda^* \geq 0$ より，$z = \boldsymbol{o}$ である。これは，(99)式に反する。

上の２式より，

$$\langle G(s^0, Q), \lambda^* \rangle = 0. \tag{120}$$

これは(40)式と同じである。一方，λ^*の線形性と(120)式より，(117)式は次のようになる。

$$\delta f(s^0; s) + \langle \delta G(s^0, Q; s), \lambda^* \rangle \geq 0, \quad \forall s \in \Omega. \tag{121}$$

これは(38)式に他ならない。

証明終

吉田＝ヒューイットの分解定理より[34]，$\lambda^* \in l_\infty^*$は次のように表すことができる[35]。

---

34) 吉田＝ヒューイットの分解定理とは，任意の有限加法的測度 μ が，可算加法的測度 μ^C と，純有限加法的測度 μ^P とに分離できるというものであり，

$$\mu = \mu^C + \mu^P$$

となる。ここで，可算加法的測度μ^Cは，通常の意味の測度であり，

$$\mu^C\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^C(E_i)$$

を満たすが，純有限加法的測度μ^Pは，

$$\mu^P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^P(E_i)$$

のみ満たされ，かつ $0 \leq \mu^C \leq \mu^P$ なる可算加法的測度 μ^C が存在しない，そのような μ^C は恒等的に $\mu^C = 0$ である。すなわち，可算加法性を極力排除した測度である。

35) $x = \{x_0, x_1, \cdots\} \in l_\infty$は，整数の集合上の関数列である。整数 p（$= 0, 1, \cdots$）に対して，$x(p) \in (a, b)$とする。(a, b)を $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$，$(b - a)/n < \varepsilon$と区分して，$E_i = \{p | \, y_i < x(p) \leq y_{i+1}\}$とする。整数全体の分割を$\Delta_\varepsilon = \{E_0, E_1, \cdots, E_n\}$とする。集合 E_i の代表点 $p_i \in E_i$（$i = 0, \cdots, n$），任意の整数 p に対して，

$$x(\Delta_\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} x(p_i)\chi_{E_i}(p)$$

と定義する。ただし，$\chi_E(p)$は指示関数である。

$$\|x(\Delta_\varepsilon) - x\| = \sup_p |x(\Delta_\varepsilon) - x(p)| < \varepsilon$$

であるから，分割 Δ_εを可能な限り細かくすると，

$$\lim \|x(\Delta_\varepsilon) - x\| = 0 \cdot$$

ここで，線形汎関数$\lambda \in l_\infty^*$に対して，$\mu(E) = \lambda(\chi_E(p))$とおくと，$\mu$は整数のべき集合上の有界な有限加法的測度になる。$\lambda$の線形性より，

$$\lambda * (\eta) = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t * \eta_t + \int \eta d\hat{\lambda} *, \quad \eta \in l_\infty \tag{122}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \left| \lambda_t * \right| < \infty . \tag{123}$$

ここで，$\{\lambda_t *\}_{t=0}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上の可算加法的測度である。また，$\hat{\lambda} *$ は有界な純有限加法的測度であり，正の整数のべき集合上の測度である。η の要素 η_t（$t = 0, 1, \cdots$）について，有限個の要素が非ゼロで，残りの無限個の要素がゼロであるとき，

$$\int \eta d\hat{\lambda} * = 0 \tag{124}$$

となる。

補題５（純有限加法的測度の性質）

$$\int \eta d\hat{\lambda} * = 0, \quad \forall \eta \in l_\infty . \tag{125}$$

$$\lambda(x(\Delta_\varepsilon)) = \sum_{i=0}^{n} x(p_i)\lambda(\chi_{E_i}(p))$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x(p_i)\mu(E_i)$$

吉田＝ヒューイットの分解定理より，

$$= \sum_{i=0}^{n} x(p_i)\{\mu^C(E_i) + \mu^P(E_i)\}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x(p_i)\mu^C(E_i) + \sum_{i=0}^{n} x(p_i)\mu^P(E_i) .$$

分割 Δ_εを可能な限り細かくする。左辺は，

$$\lambda(x(\Delta_\varepsilon)) \to \lambda(x).$$

右辺第２項は収束し（Hildebrandt(1934)），

$$\sum_{i=0}^{n} x(p_i)\mu^P(E_i) \to \int x d\mu^P .$$

また，分割は$\{\{0\},\{1\},\cdots\}$となるから，$\mu_p^C = \mu^C(\{p\})$，$x(p) = x_p$（$p = 0, 1, \cdots$）とすると，

$$\sum_{i=0}^{n} x(p_i)\mu^C(E_i) \to \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i^C x_i .$$

よって，

$$\lambda(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i^C x_i + \int x d\mu^P .$$

証明

背理法で証明する。

$$\left|\int \eta d\hat{\lambda}*\right| = \varepsilon_1 > 0 \tag{126}$$

なる$\eta \in l_\infty$が存在すると仮定する。ε_2がどんなに小さくても，

$$\left|\int \varepsilon_2 \eta d\hat{\lambda}*\right| = \varepsilon_2 \varepsilon_1 > 0 \tag{127}$$

が成り立つ。第T期を境として列ηを２つの列に分割する。すなわち，

$$\eta_t^T = \begin{cases} \eta_t \ (t \geq T\text{のとき}) \\ 0 \ (0 \leq t < T\text{のとき}) \end{cases} \tag{128}$$

$$\eta_t^1 = \begin{cases} 0 \ (t \geq T\text{のとき}) \\ \eta_t \ (0 \leq t < T\text{のとき}) \end{cases} \tag{129}$$

として，

$$\eta^1 = \{\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_{T-1}, 0, 0, \cdots, \} \tag{130}$$

$$\eta^T = \{0, \cdots, 0, \eta_T, \eta_{T+1}, \cdots\} \tag{131}$$

と置くと，

$$\eta = \eta^1 + \eta^T \tag{132}$$

となる。要素で表すと，

$$\eta = \{\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_{T-1}, \eta_T, \eta_{T+1}, \cdots\} = \{\eta_0^1, \eta_1^1, \cdots, \eta_{T-1}^1, \eta_T^T, \eta_{T+1}^T, \cdots\} \tag{133}$$

となる。すると，

$$\begin{aligned} \int \varepsilon_2 \eta d\hat{\lambda}* &= \int \varepsilon_2(\eta^1 + \eta^T) d\hat{\lambda}* \\ &= \varepsilon_2 \int \eta^1 d\hat{\lambda}* + \varepsilon_2 \int \eta^T d\hat{\lambda}*. \end{aligned} \tag{134}$$

η^1はゼロの要素が無限個あり，$\hat{\lambda}*$が純有限加法的測度であることから，

$$\int \eta^1 d\hat{\lambda}* = 0 \tag{135}$$

が成り立つ。これより，(134)式は次のようになる。

$$\int \varepsilon_2 \eta d\hat{\lambda}* = \varepsilon_2 \int \eta^T d\hat{\lambda}* . \tag{136}$$

ここで，

$$\delta G(s^0, Q; s^1) = \varepsilon_2 \eta^T \tag{137}$$

$$\delta G(s^0, Q; s^2) = -\varepsilon_2 \eta^T \tag{138}$$

なる $s^1, s^2 \in \Omega$ が存在することを示す。$\hat{q}$ について，

$$\hat{q}_t^1 = \hat{q}_t^0 \left(1 + \frac{\varepsilon_2 \eta_t^T}{Q_t} \right) \quad (t = 0, 1, \cdots) \tag{139}$$

となり，それ以外の要素は s^0 と同じである s^1 を考える。このとき，$\hat{q}_t^1 - \hat{q}_t^0$ は許容可能な変分である36)。というのも，$Q_t \geq \varepsilon$（$t = 0, 1, \cdots$）なる $\varepsilon > 0$ と，$\eta_t \leq \overline{\eta}$ なる $\overline{\eta}$ が存在するので，ε_2 を十分小さく取り，

$$\frac{\varepsilon_2 \overline{\eta}}{\varepsilon} \leq 1 \tag{140}$$

とすることができ，したがって，

$$\frac{\varepsilon_2 \eta_t^T}{Q_t} \leq \frac{\varepsilon_2 \overline{\eta}}{\varepsilon} \leq 1 \tag{141}$$

と変分を十分に小さくできるからである。このような s^0, s^1 について，次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \delta G_t(s^0, Q_t; s^1) &= -\sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_\tau^0 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{\hat{q}_t^1(x) - \hat{q}_t^0(x)\} \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x \mid \tau) dx \\ &= -\sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_\tau^0 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \hat{q}_t^0(x) \frac{\varepsilon_2 \eta_t^T}{Q_t} \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x \mid \tau) dx \\ &= \frac{\varepsilon_2 \eta_t^T}{Q_t} \left(-\sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_\tau^0 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \hat{q}_t^0(x) \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x \mid \tau) dx \right) . \end{aligned} \tag{142}$$

$G_t(s^0, Q_t) = 0$ ならば，

$$-\sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_\tau^0 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \hat{q}_t^0(x) \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x \mid \tau) dx = Q_t \tag{143}$$

となるから，(142)式は次のようになる。

---

36) $s^0, s^1 \in \Omega$ について，$s^0 + \alpha(s^1 - s^0) \in \Omega$ となる変分は許容可能な変分である。

$$\delta G_t(s^0, Q_t; s^1) = \varepsilon_2 \eta_t^T \ . \tag{144}$$

また，$\hat{q}$ について，

$$\hat{q}_t^2 = \hat{q}_t^0\left(1 - \frac{\varepsilon_2 \eta_t^T}{Q_t}\right) \quad (t = 0, 1, \cdots) \tag{145}$$

となり，それ以外の要素は s^0 と同じである s^2 を考えると，同様の議論により，次式を得る。

$$\delta G_t(s^0, Q_t; s^2) = -\varepsilon_2 \eta_t^T \ . \tag{146}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty}\left\|\eta^T\right\| &= \lim_{T\to\infty}\sup_t\left|\eta_t^T\right| \\ &= \lim_{t\to\infty}\eta_t \end{aligned} \tag{147}$$

なので，

$$\lim_{T\to\infty}\left\|\eta^T\right\| = 0 \tag{148}$$

ならば，

$$\lim_{t\to\infty}\eta_t = 0 \tag{149}$$

である。このとき，補題５は成立する[37)]。そこで，

$$\lim_{T\to\infty}\left\|\eta^T\right\| = \lim_{t\to\infty}\eta_t = \varepsilon_3 > 0 \tag{150}$$

のケースを考える[38)]。ところで，

$$\delta f(s^0; s^0 + \varepsilon_2\eta^T) = \left.\frac{df(s^0 + \alpha\varepsilon_2\eta^T)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \varepsilon_2(\nabla f(s^0), \eta^T) \tag{151}$$

---

37) $p \to \infty$ のとき $x(p)$ がゼロに収束するならば，集合 $E_p = \{p\}$ について，

$$\lambda(x) = \sum_{p=1}^{\infty} x(p)\mu^C(E_p), \quad \sum_{p=1}^{\infty}\left|\mu^C(E_p)\right| < \infty$$

と書ける（Hildebrandt(1934)）。

38) どのような T に対しても $\left\|\eta^T\right\| > 0$ であり，T が大きくなるほど，η^T の要素のうち 0 となるものが増えるので，$\left\|\eta^T\right\|$ は T の非増加関数となる。したがって，$\left\|\eta^T\right\|$ の極限値が存在する。

$$\sum_{t=0}^{\infty}\lambda_t * \delta G_t(s^0, Q_t; s^0+\varepsilon_2\eta^T) = \sum_{t=0}^{\infty}\lambda_t * \left.\frac{dG(s^0+\alpha\varepsilon_2\eta^T, Q_t)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$$
$$= \sum_{t=0}^{\infty}\lambda_t * \varepsilon_2(\nabla_s G(s^0, Q_t), \eta^T) \tag{152}$$

であり，$\lim_{t\to\infty}\eta_t > 0$であっても，$T\to\infty$のときは$\eta_t^T = 0$（$t = 0, 1, \cdots$）となるから，

$$\lim_{T\to\infty}\delta f(s^0; s^0+\varepsilon_2\eta^T) = 0 \tag{153}$$

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\lambda_t * \delta G_t(s^0, Q_t; s^0+\varepsilon_2\eta^T) = 0 \tag{154}$$

となる。一方，(127)，(136)式から，Tをどんなに大きくしても，

$$\left|\int \varepsilon_2\eta^T d\hat{\lambda} *\right| = \varepsilon_2\varepsilon_1 = \left|\int -\varepsilon_2\eta^T d\hat{\lambda} *\right| > 0 \tag{155}$$

であり，(144)，(146)式を代入すると，

$$\left|\int \delta G d\hat{\lambda} *\right| = \varepsilon_2\varepsilon_1 . \tag{156}$$

(122)式より，

$$\lambda * (\delta G) = \sum_{t=0}^{\infty}\lambda_t * \delta G_t + \int \delta G d\hat{\lambda} * . \tag{157}$$

Tを十分大きくすると，(154)式より右辺第１項はゼロになり，

$$\lambda * (\delta G) = \int \delta G d\hat{\lambda} * = \pm\varepsilon_2\varepsilon_1 . \tag{158}$$

したがって，(153)式から，十分大きなTに対して，

$$\delta f + \lambda^*(\delta G) = \pm\varepsilon_2\varepsilon_1. \tag{159}$$

つまり，

$$\delta f + \lambda^*(\delta G) < 0 \tag{160}$$

なる許容可能な変分が存在する。これは補題４に矛盾する。したがって，(126)式を成立させる$\eta \in l_\infty$は存在しない。

証明終

補題５より，線形汎関数 $\lambda^* \in l_\infty{}^*$は，

$$\lambda^*(\eta) = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t{}^* \eta_t \quad (t = 0, 1, \cdots) \tag{161}$$

と表される。

この関係を用いて，(38)式を計算してみる。最適解を $s^0 = [\hat{y}^0, \hat{\gamma}^0, \hat{q}^0]$ として，$s^1 = [\hat{y}^1, \hat{\gamma}^1, \hat{q}^1]$ に対して変分 $s^1 - s^0$を考える。

（1） $\hat{q}$ の変分について

第 t 期に $\hat{q}_t^1(x) \neq \hat{q}_t^0(x)$ となる以外は，要素がすべて $s^1 = s^0$である $s^0, s^1 \in \Omega$を考える。このとき，

$$\delta G_i(s^0, Q_i; s^1) = 0, \quad \forall i \neq t \tag{162}$$

となる。したがって，(161)式に当てはめると，

$$\lambda^*(\delta G(s^0, Q; s^1)) = \lambda_t{}^* \delta G_t(s^0, Q_t; s^1). \tag{163}$$

このとき，(38)式は次のようになる。

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{q}_t} + \lambda_t{}^* \frac{\partial G_t}{\partial \hat{q}_t} \right) (\hat{q}_t^1 - \hat{q}_t^0) \geq 0 . \tag{164}$$

f, G_t を $\hat{q}_t$ で偏微分して上の式に代入すると，

$$\sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_\tau^0 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{\beta^t c'(\hat{q}_t^0(x))x - \lambda_t{}^*\} \{\hat{q}_t^1(x) - \hat{q}_t^0(x)\} \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x \mid \tau) dx \geq 0, \quad \forall \hat{q}_t^1 . \tag{165}$$

ただし，$\hat{q}_t^1$ は可積分な関数に限る。

「正の測度を持つ集合」を，その集合上で $\sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_\tau^0 \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x \mid \tau)$ が正のルベーグ測度を持つ集合として定義する。すなわち，第０期から第 t 期までの間に参入した企業のうち，第 t 期においても市場で活動している企業の測度は正である。したがって，この集合上での変分のみ，f, G の値の変化に影響を与える。

(165)式より，次の補題が示される。

補題５′（可算加法的測度の性質）

測度ゼロの集合以外の集合上では，

$$\lambda_t{}^* = \beta^t c'(\hat{q}_t^0(x))x > 0 \quad (t = 0, 1, \cdots) \tag{41}$$

が成り立つ。

証明

任意の $\hat{q}_t^1$ で(165)式が成り立つためには，(41)式が成り立っていないといけない。このとき，$\lambda_t{*}>0$となっていることを確認する。

$Q_t>0$ならば，

$$Q_t=\sum_{\tau=0}^{t}\hat{y}_\tau^0\int\hat{q}_t^0(x)\hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x\,|\,\tau)dx \tag{166}$$

から, 正の測度を持つ集合上では $\hat{q}_t^0(x)>0$ となる。ゆえに，$c'(\hat{q}_t^0(x))>0$ である。このとき，どのような $\hat{q}_t^1$ に対しても(165)式が成り立つためには，$\lambda_t{*}>0$でなければならない。なぜならば，$\lambda_t{*}=0$のときは，$\beta^t c'(\hat{q}_t^0(x))x-\lambda_t{*}>0$ となり，許容可能な変分 $\hat{q}_t^1(x)-\hat{q}_t^0(x)<0$ に対して，(165)式は成立しなくなるからである。

また，正の測度を持つある集合上で $\hat{q}_t^0(x)=0$ ならば，$c'(0)=0$であるので，

$$(165)\text{式の左辺}=-\sum_{\tau=0}^{t}\hat{y}_\tau^0\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\lambda_t*\hat{q}_t^1(x)\hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x\,|\,\tau)dx \tag{167}$$

となり, (165)式を逸脱するような許容可能な変分 $\hat{q}_t^1(x)>0$ が存在する。したがって，$\hat{q}_t^0>0$ でなくてはいけない。

証明終

（2） $\hat{y}$ の変分について

第 t 期について $\hat{y}_t^1\neq\hat{y}_t^0$ となる以外は，すべての要素が $s^1=s^0$となる $s^0,s^1\in\Omega$ を考える。(38)式は次のようになる。

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\hat{y}_t}+\sum_{j=t}^{\infty}\lambda_j*\frac{\partial G_j}{\partial\hat{y}_t}\right)(\hat{y}_t^1-\hat{y}_t^0)\geq 0,\quad\forall\hat{y}_t^1. \tag{168}$$

よって，

$$\hat{y}_t^0>0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial\hat{y}_t}+\sum_{j=t}^{\infty}\lambda_j*\frac{\partial G_j}{\partial\hat{y}_t}=0 \tag{169}$$

$$\hat{y}_t^0=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial\hat{y}_t}+\sum_{j=t}^{\infty}\lambda_j*\frac{\partial G_j}{\partial\hat{y}_t}\geq 0. \tag{170}$$

f，G_t を $\hat{y}_t$ で偏微分して上の２式に代入することで，次の条件が導かれる。

$$\sum_{j=t}^{\infty}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\{\beta^j[c(\hat{q}_j^0(x))x+(1-\beta)W]-\lambda_j*\hat{q}_j^0(x)\}\hat{\psi}_j^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x\mid t)dx+\beta^t k \underset{=}{\geq} 0,\ \ \hat{y}_t^0 \underset{>}{=} 0 \text{（複号同順）}. \tag{42}$$

（3）$\hat{\gamma}$ の変分について

ある i について $\hat{\gamma}_i^1(\tau)\neq\hat{\gamma}_i^0(\tau)$ となる以外は，すべての要素が $s^1 = s^0$となる s^0, $s^1\in\Omega$を考える。$\hat{\gamma}_i(\tau)$とは，第τ期に参入し，i 期間市場で活動しているときの退出政策であるので，この変分は第$\tau+i$ 期以降の期待生産量に影響を与えるが，G_t（$t<\tau+i$）には影響を与えない。したがって，(38)式は次のようになる。

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\hat{\gamma}_i(\tau)}+\sum_{j=\tau+i}^{\infty}\lambda_j*\frac{\partial G_j}{\partial\hat{\gamma}_i(\tau)}\right)\{\hat{\gamma}_i^1(\tau)-\hat{\gamma}_i^0(\tau)\}\geq 0\,. \tag{171}$$

f，G_tを $\hat{\gamma}_i$ で偏微分して上の式に代入することで，次の条件が導かれる。

$$\left\{\sum_{j=\tau+i}^{\infty}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\{\beta^j[c(\hat{q}_j^0(x))x+(1-\beta)W]-\lambda_j*\hat{q}_j^0(x)\}\frac{\partial\hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}}{\partial\hat{\gamma}_i(\tau)}(x\mid\tau)dx\right\}\hat{y}_\tau^0\{\hat{\gamma}_i^1(\tau)-\hat{\gamma}_i^0(\tau)\}\geq 0,\quad \forall\hat{\gamma}_i^1(\tau). \tag{43}$$

補題６（制約付き費用最小化問題とラグランジュ関数の最小化問題との同値性）

(41)，(42)，(43)式を満たす(s^0, λ^*)について，ラグランジュ関数

$$L(s,\lambda^*)=f(s)+\lambda^*(G(s,Q)) \tag{37}$$

は最小となる。また，$f(s^0)$は大域的な制約付き最小値となる。

証明

（1）まず，L が s^0で最小化されているとき，$f(s^0)$は大域的な最小値となることを示す。

$$f(s^1)<f(s^0) \tag{172}$$

$$G(s^1,Q)\leq G(s^0,Q)=\boldsymbol{o} \tag{173}$$

なる $s^1\in\Omega$が存在するとき，補題４より$\lambda^*\geq 0$なので，

$$\lambda^*(G(s^1,Q))\leq\lambda^*(G(s^0,Q))=0. \tag{174}$$

(172)式と併せて，

$$f(s^1) + \lambda^*(G(s^1, Q)) \le f(s^0) + \lambda^*(G(s^0, Q)) \,. \tag{175}$$

これは，L が s^0で最小化されるという前提に反する。したがって，このようなs^1は存在しない。

（2）次に，

$$L(s, \lambda^*) \ge L(s^0, \lambda^*), \quad \forall s \in \Omega \tag{176}$$

を証明する。c は凸関数なので，(41)式を考慮に入れると，

$$\begin{aligned} c(\hat{q}_t) &\ge c(\hat{q}_t^0) + c'(\hat{q}_t^0)(\hat{q}_t - \hat{q}_t^0) \\ &= c(\hat{q}_t^0) + x^{-1}\beta^{-t}\lambda_t * (\hat{q}_t - \hat{q}_t^0) \,. \end{aligned} \tag{177}$$

補題５より，

$$\lambda * (G(s,Q)) = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t * G_t(s, Q_t) \,. \tag{178}$$

上の２式を用いると，

$$\begin{aligned} f(s) + \lambda * (G(s,Q)) &= f(s) + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t * G_t(s, Q_t) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{\beta^t [c(\hat{q}_t)x + (1-\beta)W] - \lambda_t * \hat{q}_t\} \sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_\tau \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}(\tau)} dx + \beta^t k\hat{y}_t + \lambda_t * Q_t \right\} \\ &\ge \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{\beta^t [c(\hat{q}_t^0)x - \beta^{-t}\lambda_t * (\hat{q}_t - \hat{q}_t^0) + (1-\beta)W] - \lambda_t * \hat{q}_t\} \sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_\tau \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}(\tau)} dx + \beta^t k\hat{y}_t + \lambda_t * Q_t \right\} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{\beta^t [c(\hat{q}_t^0)x - \beta^{-t}\lambda_t * \hat{q}_t^0 + (1-\beta)W] \sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_\tau \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}(\tau)} dx + \beta^t k\hat{y}_t + \lambda_t * Q_t \right\} \\ &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \left[\left\{ \hat{y}_\tau \sum_{t=\tau}^{\infty} \beta^t \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [c(\hat{q}_t^0)x - \beta^{-t}\lambda_t * \hat{q}_t^0 + (1-\beta)W] \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}(\tau)} dx \right\} + \beta^\tau k\hat{y}_\tau + \lambda_\tau * Q_\tau \right] . \end{aligned} \tag{179}$$

ここで，

$$p_t = \beta^{-t}\lambda_t^* \tag{180}$$

と置くと，利潤関数$\pi(p_t, x_t^*)$は

$$\pi(\beta^{-t}\lambda_t *, x) = \beta^{-t}\lambda_t * \hat{q}_t^0 - c(\hat{q}_t^0)x \tag{181}$$

と書けるので，(179)式右辺の{}内を最小化する問題

$$\min_{\hat{\gamma}(\tau)\in\Gamma} \hat{y}_\tau \sum_{t=\tau}^{\infty} \beta^t \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [-\pi(\beta^{-t}\lambda_t *, x) + (1-\beta)W] \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}(\tau)} dx \tag{182}$$

の解が $\hat{\gamma}^0(\tau) = \gamma(\{\beta^{-t}\lambda_t *\}_{t=0}^{\infty}, \tau)$ となる。この問題の１階の条件は(43)式である。

ここで，

$$r_\tau = \sum_{t=\tau}^{\infty} \beta^t \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [c(\hat{q}_t^0)x - \beta^{-t}\lambda_t * \hat{q}_t^0 + (1-\beta)W] \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)} dx + \beta^\tau k \tag{183}$$

とすると，(179)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} f(s) + \lambda * (G(s,Q)) &\geq \sum_{\tau=0}^{\infty} \hat{y}_\tau r_\tau + \sum_{\tau=0}^{\infty} \lambda_\tau * Q_\tau \\ &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \hat{y}_\tau^0 r_\tau + \sum_{\tau=0}^{\infty} \lambda_\tau * Q_\tau + \sum_{\tau=0}^{\infty} (\hat{y}_\tau - \hat{y}_\tau^0) r_\tau \\ &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \hat{y}_\tau^0 r_\tau + \sum_{\tau=0}^{\infty} \lambda_\tau * G_\tau(s^0, Q_\tau) + \sum_{\tau=0}^{\infty} (\hat{y}_\tau - \hat{y}_\tau^0) r_\tau \\ &= f(s^0) + \lambda * (G(s^0, Q)) + \sum_{\tau=0}^{\infty} (\hat{y}_\tau - \hat{y}_\tau^0) r_\tau . \end{aligned} \tag{184}$$

$\hat{y}_\tau^0$ のとき(182)は最小値を達成するので，

$$\begin{aligned} & r_\tau \hat{y}_\tau \geq r_\tau \hat{y}_\tau^0, \quad \forall \tau \\ \Leftrightarrow\ & (\hat{y}_\tau - \hat{y}_\tau^0) r_\tau \geq 0, \quad \forall \tau. \end{aligned} \tag{185}$$

したがって，(184)式は，

$$f(s) + \lambda^*(G(s, Q)) \geq f(s^0) + \lambda^*(G(s^0, Q)) . \tag{186}$$

証明終

補題７（$K(Q)$の性質）

ｉ）$K(Q)$は Q の凸関数である。

ⅱ）$K(Q)$は Q の各要素について微分可能で，

$$\frac{\partial K}{\partial Q_t} = \lambda_t * . \tag{187}$$

証明

ｉ）の証明：

$Q = Q^0$のときの費用最小化解を s^0, $Q = Q^1$のときのそれを s^1とする。このとき,

$$G(s^0, Q^0) = \boldsymbol{o} \tag{188}$$

$$G(s^1, Q^1) = \boldsymbol{o} \tag{189}$$

である。(189)式より,

$$Q_t^1 = \sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_\tau^1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \hat{q}_t^1(x) \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^1(\tau)}(x \mid \tau) dx . \tag{190}$$

さらに,

$$\begin{aligned} G_t(s^1, Q_t^0) &= -\sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_\tau^1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \hat{q}_t^1(x) \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^1(\tau)}(x \mid \tau) dx + Q_t^0 \\ &= -Q_t^1 + Q_t^0 . \end{aligned} \tag{191}$$

ゆえに,

$$G(s^1, Q^0) = -Q^1 + Q^0. \tag{192}$$

補題６，およびλ*が線形汎関数であることを考慮に入れると,

$$\begin{aligned} & f(s^0) + \lambda^*(G(s^0, Q^0)) \leq f(s^1) + \lambda^*(G(s^1, Q^0)) \\ \Leftrightarrow\ & f(s^1) - f(s^0) \geq \lambda^*(G(s^0, Q^0) - G(s^1, Q^0)). \end{aligned} \tag{193}$$

$K(Q^0) = f(s^0)$，$K(Q^1) = f(s^1)$，さらに(188)，(191)式より，上の式は次のように書き換えられる。

$$K(Q^1) - K(Q^0) \geq \lambda^*(Q^1 - Q^0). \tag{194}$$

ここで,

$$Q^\rho = \rho Q^1 + (1 - \rho)Q^2 \tag{195}$$

として，(194)式に当てはめると,

$$K(Q^1) - K(Q^\rho) \geq \lambda^*(Q^1 - Q^\rho) \tag{196}$$

$$K(Q^2) - K(Q^\rho) \geq \lambda^*(Q^2 - Q^\rho). \tag{197}$$

(196)式×ρ＋(197)式×$(1 - \rho)$を計算すると，λ*の線形性より,

$$\rho K(Q^1) + (1-\rho)K(Q^2) - K(Q^\rho) \geq \rho\lambda^*(Q^1 - Q^\rho) + (1-\rho)\lambda^*(Q^2 - Q^\rho)$$
$$= \lambda^*(\rho Q^1 + (1-\rho)Q^2 - Q^\rho) = 0. \tag{198}$$

よって，

$$\rho K(Q^1) + (1-\rho)K(Q^2) \geq K(\rho Q^1 + (1-\rho)Q^2). \tag{199}$$

ⅱ）の証明：

第 t 期において

$$Q_t^1 = (1+\varepsilon)Q_t^0,\quad \varepsilon > 0 \tag{200}$$

となること以外は $Q^1 = Q^0$であり，このεについて，

$$\hat{q}_t^1(x) = (1+\varepsilon)\hat{q}_t^0(x) \tag{201}$$

となること以外，すべて $\tilde{s}^1 = s^0$ となるような $\tilde{s}^1 \in \Omega$ を考える。すると，

$$f(s^1) \leq f(\tilde{s}^1) \tag{202}$$

となるので，

$$f(s^1) - f(s^0) \leq f(\tilde{s}^1) - f(s^0)$$
$$= \beta^t \left\{ \sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_\tau^0 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{c(\hat{q}_t^1(x)) - c(\hat{q}_t^0(x))\} x \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x \mid \tau) dx \right\}$$
$$= \beta^t \left\{ \sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_\tau^0 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{c((1+\varepsilon)\hat{q}_t^0(x)) - c(\hat{q}_t^0(x))\} x \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x \mid \tau) dx \right\}. \tag{203}$$

ここで，

$$c((1+\varepsilon)\hat{q}_t^0(x)) - c(\hat{q}_t^0(x)) = \varepsilon c'(\hat{q}_t^0(x))\hat{q}_t^0(x) + o(\varepsilon)\,. \tag{204}$$

さらには，$G_t(s^0, Q_t^0) = 0$ より，

$$Q_t^0 = \sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_\tau^0 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \hat{q}_t^0(x) \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x \mid \tau) dx \tag{205}$$

なので，

$$
\begin{aligned}
(203)\text{式} &= \sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_{\tau}^{0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varepsilon\beta^{t} c'(\hat{q}_t^0(x))\hat{q}_t^0(x) x \hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x \mid \tau)dx + o(\varepsilon) \\
&= \sum_{\tau=0}^{t} \hat{y}_{\tau}^{0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varepsilon\lambda_t * \hat{q}_t^0(x)\hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x \mid \tau)dx + o(\varepsilon) \quad \text{（(41)式より）} \\
&= \varepsilon\lambda_t * \left(\sum_{\tau=0}^{t} y_{\tau}^{0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \hat{q}_t^0(x)\hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}^0(\tau)}(x \mid \tau)dx \right) + o(\varepsilon) \quad \text{（}\lambda_t\text{*の線形性より）} \\
&= \varepsilon\lambda_t * Q_t^0 + o(\varepsilon) \quad \text{（(205)式より）.}
\end{aligned} \tag{206}
$$

以上より，

$$f(s^1) - f(s^0) \le \varepsilon\lambda_t * Q_t^0 + o(\varepsilon)\ . \tag{207}$$

また，(194)，(200)式より，

$$K(Q^1) - K(Q^0) \ge \lambda * (Q^1 - Q^0) = \varepsilon\lambda_t * Q_t^0\ . \tag{208}$$

この２式より，

$$\varepsilon\lambda_t * Q_t^0 + o(\varepsilon) \ge f(s^1) - f(s^0) = K(Q^1) - K(Q^0) \ge \varepsilon\lambda_t * Q_t^0\ . \tag{209}$$

両辺εQ_t^0で割ると，

$$\lambda_t * + o(\varepsilon) \ge \frac{K(Q^1) - K(Q^0)}{\varepsilon Q_t^0} \ge \lambda_t *\ . \tag{210}$$

$\varepsilon \to +0$とすると，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{K(Q^1) - K(Q^0)}{\varepsilon Q_t^0} = \lambda_t *\ . \tag{211}$$

(200)，(201)式を$\varepsilon < 0$として，上と同様の議論をすることで，次式が導かれる。

$$\lim_{\varepsilon \to -0} \frac{K(Q^1) - K(Q^0)}{\varepsilon Q_t^0} = \lambda_t *\ . \tag{212}$$

これより，右側微分係数と左側微分係数が一致するので，$K(Q)$は微分可能であり，かつ(187)式が成り立つ。

証明終

定理２（均衡の存在，一意性，最適性）

ｉ）市場均衡条件(E-1), (E-2)を満たす市場均衡価格列 $\widetilde{p}=\{\widetilde{p}_t\}_{t=0}^{\infty}$，および市場均衡参入列 $\widetilde{y}=\{\widetilde{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ が存在する。

ⅱ）市場均衡 $(\widetilde{p},\widetilde{y})$ は一意である。

ⅲ）市場均衡 $(\widetilde{p},\widetilde{y})$ に対して，

$$\widetilde{p}_t=\beta^{-t}\lambda_t* \tag{50}$$

と置くと，

$$Q_t*=Q_t(\widetilde{p},\widetilde{y}) \tag{51}$$

$$\hat{q}_t*(x)=q(\widetilde{p}_t\,|\,x) \tag{52}$$

$$\hat{\gamma}*(\tau)=\gamma(\widetilde{p},\tau) \tag{53}$$

となる。このとき，$\{Q_t(\widetilde{p},\widetilde{y})\}_{t=0}^{\infty}$ は社会的余剰 $S(Q)$を最大化し，$[\widetilde{y},\gamma(\widetilde{p},\tau),\{q(\widetilde{p}_t\,|\,x)\}_{t=0}^{\infty}]$ は最小費用 $K(Q^*)$を達成する。

証明

（1）$S(Q)$最大化解が市場均衡となることの証明

生産量について，(41)式を $\hat{q}_t=\hat{q}_t*$ としたものが，$Q=Q^*$のときの総費用最小化の１階の条件である。(50)式より，

$$\widetilde{p}_t=c'(\hat{q}_t*(x))x \quad (t=0,1,\cdots) \tag{213}$$

となる。企業の１階の条件(2)式と比べると，

$$\hat{q}_t*(x)=q(\widetilde{p}_t\,|\,x) \tag{52}$$

となる。

退出政策について，(43)式を $\hat{q}_t=\hat{q}_t*$，$\hat{\gamma}(\tau)=\hat{\gamma}*(\tau)$ としたものが，$Q=Q^*$のときの総費用最小化の１階の条件である。一方，企業の１階の条件(26)式について，(50)式および

$$\pi(\beta^{-t}\lambda_t*,x)=\beta^{-t}\lambda_t*\hat{q}_t*-c(\hat{q}_t*)x \tag{214}$$

と置くことで，２つの条件は一致するので，

$$\hat{\gamma}*(\tau)=\gamma(\tilde{p},\tau) \tag{53}$$

$$\hat{\psi}_t^{\hat{\gamma}*(\tau)}(x\,|\,\tau)=\psi_t(x\,|\,\tau;\tilde{p}) \tag{215}$$

となる。

参入について，(42)式を $\hat{q}_t=\hat{q}_t*$，$\hat{\gamma}(\tau)=\hat{\gamma}*(\tau)$ としたものが，$Q = Q*$のときの総費用最小化の１階の条件である。両辺をβ^tで割り，(50)，(214)，(215)式を当てはめる。これにより導かれる式は，

$$V_\tau(x_0,0;p)-k=W+\sum_{t=\tau}^{\infty}\beta^{t-\tau}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\{\pi(p_t,x)-(1-\beta)W\}\psi_t(dx\,|\,\tau;p)-k \underset{=}{\overset{\le}{}} W,\ \ y_t \underset{>}{\overset{=}{}} 0 \text{（複号同順）} \tag{216}$$

となる。これは市場均衡条件(E-2)に他ならない。

総生産量について，(48)式より，

$$D_t(Q_t*)=\beta^{-t}\lambda_t*. \tag{217}$$

(50), (51)式より，

$$D_t(Q_t(\tilde{p},\tilde{y}))=\tilde{p}_t\,. \tag{218}$$

この式は市場均衡条件(E-1)と同じである。したがって，$S(Q)$最大化解は市場均衡になっている。$S(Q)$最大化解が存在するという事実をもって，市場均衡も存在することを示した。

（2）市場均衡は$S(Q)$最大化解となることの証明

(50)，(187)式より，市場均衡$(\tilde{p},\tilde{y})$は，

$$\tilde{p}_t=\beta^{-t}\frac{\partial K}{\partial Q_t}(Q_t(\tilde{p},\tilde{y})) \tag{219}$$

を満たす。市場均衡条件(E-1)より，

$$D_t(Q_t(\tilde{p},\tilde{y}))=\beta^{-t}\frac{\partial K}{\partial Q_t}(Q_t(\tilde{p},\tilde{y}))\,. \tag{220}$$

これは，$S(Q)$最大化の１階の条件(48)式と同じである。したがって，$Q_t(\tilde{p},\tilde{y})$は$S(Q)$を最大にする。$S(Q)$は凹関数であるから，最大化解は一意である。すなわち，$Q_t*=Q_t(\tilde{p},\tilde{y})$として一意に定まる。市場均衡が社会的余剰を最大にするという

意味で，均衡は最適となる。

証明終

参考文献

[1] 加藤浩（2016）「産業動学に関する研究ノート（理論編）」『経済学研究（西南学院大学）』第49巻第4号 pp.19‑68。

[2] 松原望（2010）『ベイズ統計学概説：フィッシャーからベイズへ』，明日香出版社。

[3] 渡部洋（1999）『ベイズ統計学入門』，福村出版。

[4] Hilbebrandt, T. H. (1934), “On Bounded Functional Operations”, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol.64, pp.868-875.

[5] Jovanovic, B. (1982), “Selection and the Evolution of Industry.”, *Econometrica*, Vol.50, pp.649-670.

[6] Luenberger, D. G. (1969), *Optimization by Vector Space Methods*, Wiley&Sons.

[7] Stokey, N. and R. Lucas, Jr. (1989), *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press.

[8] Yosida, K. and E. Hewitt. (1952), “Finitely Additive Measures.”, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol.72, pp.46-66.