

<研究ノート>

# 正方形の紙を切り貼りして作る 16種類のユニット図形と いろいろなエッシャー風モザイク模様

松 村 敬 治

Various Kinds of Escher-Like Tiling Patterns  
Constructed from 16-Types of Unit Shapes  
Made of Cut and Pasted Square Papers

Keiji Matsumura

In order to study tiling design, 16-types of unit shapes were created from cut and pasted square papers. Each of the unit shapes has been demonstrated to be related to the Escher-like tiling unit because they can construct various kinds of Escher-like tiling patterns. The results of this paper are expected to be used as teaching materials in mathematics and art education in primary and secondary schools.

## はじめに

ある一つの形を持つ図形をユニットとして、平面を隙間無くかつ重なり無く埋め尽くすデザインを作ることを、平面の正則分割という。正則分割においては、ユニットとなる図形の種類に応じて、図形を回転させたり裏返したりして、平面を埋め尽くすことでデザインを完成させることになる。オランダの版画家の M. C. Escher (エッシャー) は、数学的見地から正則分割のデザインを研究

し、芸術的な作品を数多く残したことで有名である[1]。このエッシャーの業績に敬意を表して、正則分割のユニットとなる図形は、「エッシャー風タイリング図形」と呼ばれることがある。本稿では「エッシャー風タイリング図形」のことを、単に、「エッシャー図形」と呼び、エッシャー図形を平面に隙間無く敷き詰めてできる繰り返し模様のことを「エッシャー風モザイク模様」と呼ぶことにする。

エッシャー図形の分類の仕方と描き方についてはいくつかの本に詳しく書かれている[2-5]。最近では、エッシャー図形をコンピュータグラフィックスで自動的に描く試みも行われている[6-8]。こうした研究は、自然科学的なアプローチからエッシャー図形を取り扱っているので、一般の人がオリジナルのエッシャー図形を作り上げるのは難解すぎるというイメージを持つかも知れない。しかし、一部のエッシャー図形の作り方に関しては、簡単に描けるような工夫が為され、一般の人を対象とした教養講座だけでなく、小学校の算数や中学校の数学の教育現場においても、創作の楽しさを体験する教材として提供されている[9-16]。

本稿の目的は、多種多様なエッシャー図形を簡単な方法で作りに出すことができるような教材を提供することである。具体的には、1枚の正方形の紙を切ったり貼ったりすることで、16種類のユニット図形ができることを示し、そのユニット図形のそれぞれが、エッシャー図形と関連していることを、エッシャー風モザイク模様を作り上げる過程を通して示すことを目的としている。

## 1. 正方形の紙の切り取り方とユニット図形の作り方

この節では、最初に、正方形の紙を切り取ってピース a、ピース b、およびピース c の3つの素片を作る方法について述べ、続いて、3つの素片を繋ぎ合わせて一つのユニット図形を作る方法について述べる。

正方形の紙を3つの素片に切り取る方法は、次の通りである。

### 正方形の紙をピース a、ピース b、およびピース c に切り取る手順

- (1) 正方形の紙を用意する (図 1 左図)。正方形の隣り合う 2 つの頂点の 1 つから、正方形の 1 辺を含むように、もう 1 つの頂点まで、図形を切り取り、その切り取った素片をピース a とする (図 1 中図)。
- (2) 残りの紙から正方形の 1 辺を含む図形を同様に切り取り、その素片をピース c とする。残った素片はピース b とする (図 1 右図)。
- (3) ピース a、ピース b、およびピース c が目的の 3 つの切り取った素片である (図 1 右図)。

ここでは、正方形の紙の 4 つの頂点を反時計回りに ABCD で符号を付けているものとして解説する。図 1 では、正方形の紙の頂点 A から頂点 B までを切り取ったものをピース a としている。このとき、図では折れ線で切り取っているが、頂点 A から頂点 B までは任意の自由な曲線で切り取っても良いこととする。一方、正方形の紙の頂点 B から頂点 C までを切り取ったものをピース c としている。このときも、図では折れ線で切り取っているが、頂点 B から頂点 C までは任意の自由な曲線で切り取っても良いこととする。以上の作業で、正方形の紙から、ピース a、ピース b、およびピース c の 3 つの素片が得られることになる。

ここで述べた素片の切り取り方の特徴は、正方形の紙の 4 つの頂点が切り

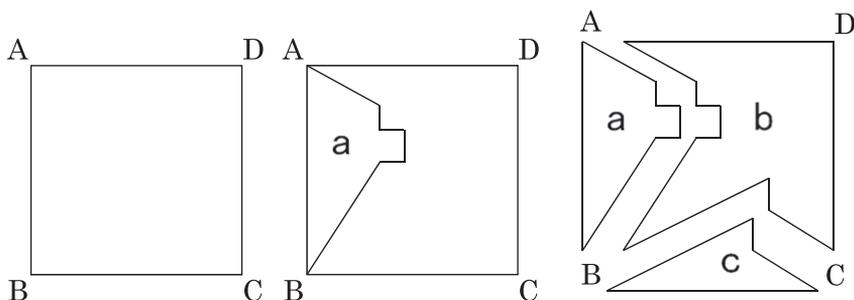


図 1 正方形の紙から 3 つの素片を切り取る方法

取った後もピース b の中に残るということである。別の方法による素片の切り取りに関しては、後の節で言及する。

続いて、3つの素片を繋ぎ合わせて一つのユニット図形を作る方法は、次の通りである。

### 切り取った3つの素片からユニット図形を作る手順

- (1) 3つの素片、ピース a、ピース b、およびピース c を用意する (図 2 ①)。適切な台紙を用意して、台紙の中央付近にピース b を貼り付ける (図 2 ②)。
- (2) ピース b の2つの直線部分の1つに、ピース a の直線部分を合わせるように貼り付ける。続いて、ピース b の残りの直線部分にピース c の直線部分を合わせるように貼り付ける (図 2 ③)。
- (3) 3つの素片を貼り付けてできた図形の輪郭線をトレースしてユニット図形を完成させる (図 2 ④)。

次の節で述べるように、この3つの素片を貼り付ける方法は、いろいろなやり方がある。図 2 では、ピース b の辺 DC にピース a を貼り付け、ピース b の辺 AD にピース c を貼り付けている。この方法他に、ピース a とピース c の貼り付ける位置を交換して貼り付ける方法やピース a やピース c を裏返して貼り付ける方法など、いろいろな方法がある。ともかく、ピース b の辺 DC と辺 AD の直線部分が、ピース a とピース c の直線部分と貼り合わされればユニット図形の1つができあがる。

## 2. 16 種類のユニット図形とその属性

前節では、正方形の紙を3つに切り取って、それらを繋ぎ合わせて一つのユニット図形を作る方法について述べたが、本節では、最初に、正方形の紙を切り取ってできる素片の型がA型とB型の2種類あることを述べ、続いて、それぞれの型から作った各8種類のユニット図形の紹介と、それらに対するエッ

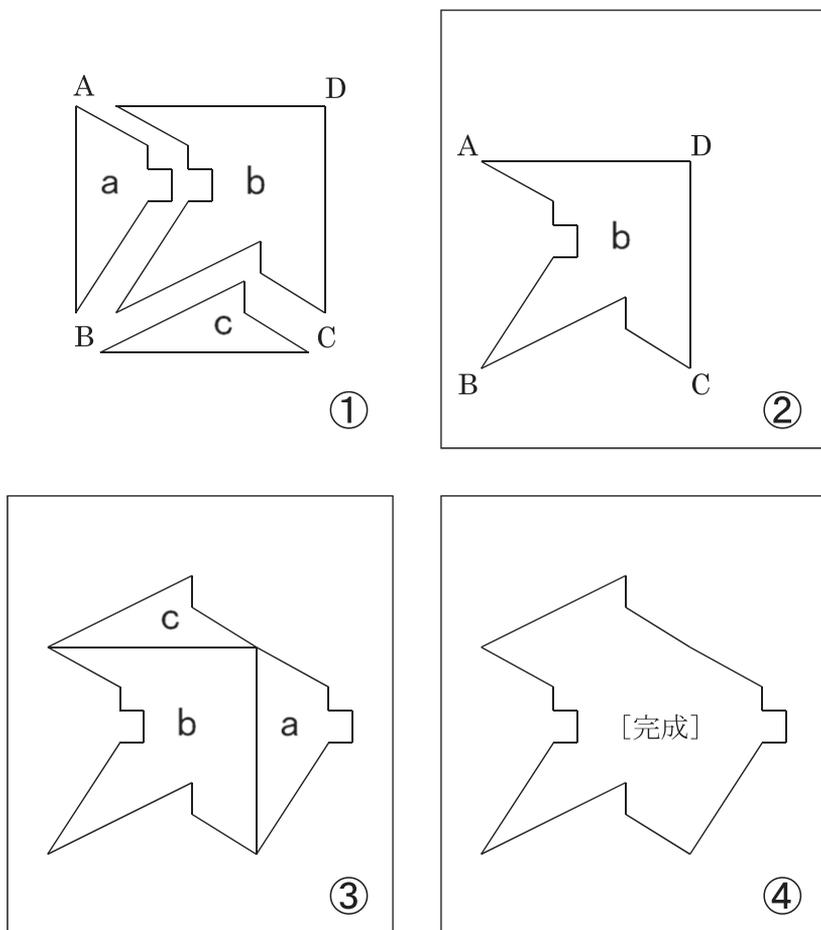


図2 3つの素片を台紙に貼り付けてユニット図形を作る方法

シャー図形に関する属性について記述する。尚、本節のタイトルの「16種類のユニット図形」とは、A型とB型のユニット図形を合わせると16種類のユニット図形になるという意味である。

### 2-1 正方形の紙を切り取ってできる2種類の型 — A型とB型

正方形の紙をピース a、ピース b、およびピース c の3つの素片に切り取る

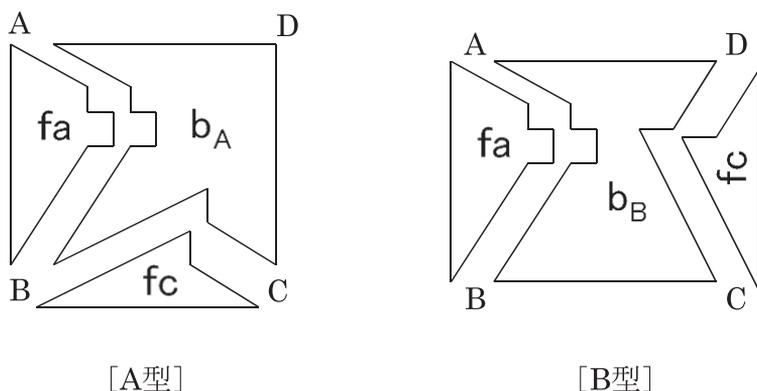


図3 正方形の紙の2種類の切り取り方 — A型とB型

方法は、図3に示すように、A型とB型の2つの方法がある。両者の違いは、ピースbの直線部分の位置に現れる。A型（図3左側）では、ピースbの辺ADと辺DCが直角の関係になっているのに対して、B型（図3右側）では、ピースbの辺ADと辺BCが平行の関係にある。そこで、今後、A型およびB型のピースbの素片を、それぞれ、ピース $b_A$ およびピース $b_B$ と標記して区別することにする。一方、図3のピースaとピースcは、ユニット図形を作るときに回転させたり裏返したりして貼り付ける操作を行うが、そのような操作を行ってできたユニット図形を見るだけでも操作の履歴がわかるように、aおよびcの記号の代わりに、それぞれ、「f」の文字を前に付けて、faおよびfcの識別記号を付けている。また、ピースaとピースcは、本稿では意図的に、A型とB型で同じ形を採用している。これに関連して、図3のB型のピースcはA型のもを反時計回りに $90^\circ$ 回転した形になっているので、その図形内部の識別記号のfcも同様に回転を施した表示を行っている。

## 2-2 A型のユニット図形のリストとエッシャー図形の関係

A型の方法で切り取った3つの素片を貼り合わせることにより、図4に示すような8個のユニット図形を組み立てることができた。図では、8個のユニット図形をA1からA8までの英数字で識別している。

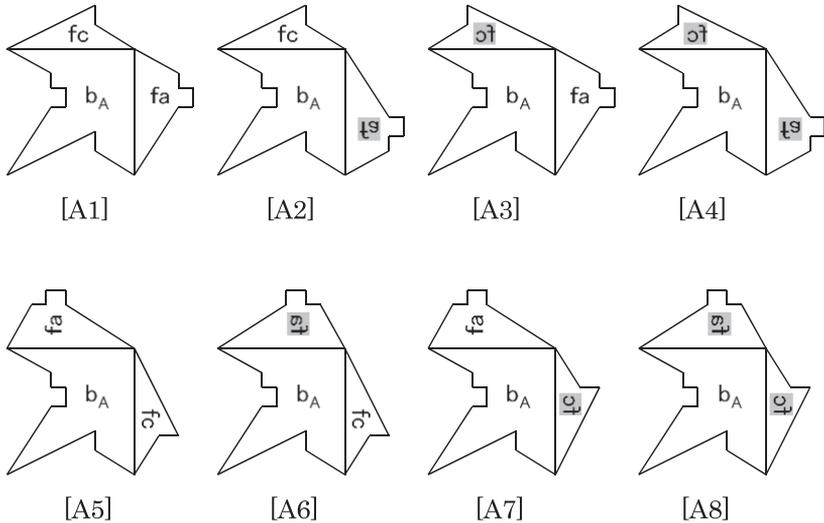


図 4 A 型の 8 個のユニット図形の作り方

ユニット図形の A1 は、図 3 に示す A 型のピース a とピース c をそのままの向きでピース  $b_A$  の右側と上側の辺に貼り付けている。この A1 を基本として他のユニット図形を見ると、A2 はピース a が裏返しになっており、A3 はピース c が裏返しになっており、A4 はピース a とピース c の両方が裏返しになっている。一方、ユニット図形の A5 は、A1 と比較すると、ピース a とピース c の位置が入れ替わって貼り付けられている。この A5 を基本として他のユニット図形を見ると、A6 はピース a が裏返しになっており、A7 はピース c が裏返しになっており、A8 はピース a とピース c の両方が裏返しになっている。図 4 では、裏返しになったピース a とピース c は識別記号も裏返っているが、より明確に裏返ったことがわかるように識別記号の周りをグレーで塗りつぶしている。

図 5 には、図 4 の 8 つのユニット図形のそれぞれの輪郭をトレースした結果を示す。図 5 のそれぞれのユニット図形には、後の節でエッシャー風モザイク模様を作り上げるときに元の図形の種類や向きなどの操作情報が容易に確認できるように、図形の内部に「f」の文字と識別英数字を記入した。今後は、こ

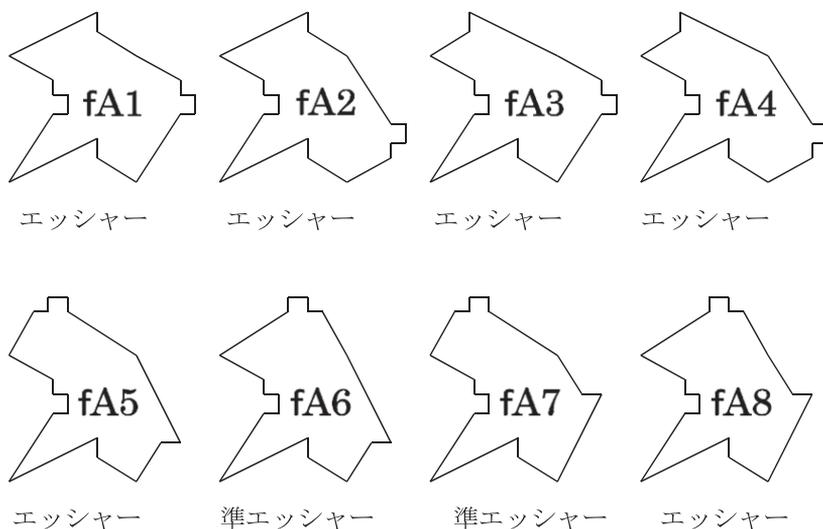


図5 A型の8個のユニット図形とエッシャー図形の関係

のユニット図形の内部に記入した識別英数字によって図形を区別することにする。一方、図5のそれぞれのユニット図形の下に記した「エッシャー」あるいは「準エッシャー」は、そのユニット図形の属性が、「エッシャー図形」であるか、あるいは、「準エッシャー図形」であるかを示す。ここで、「準エッシャー図形」とは、単独では2次元空間を埋め尽くすことは不可能であるが、複数のユニット図形を組み合わせればエッシャー風モザイク模様の作成が可能となるようなユニット図形のことを指すものとする。

図5に示すように、A型の8個のユニット図形の全てが、エッシャー図形あるいは準エッシャー図形に属している。図5のエッシャー図形を用いてエッシャー風モザイク模様を作る方法や、異なる2種類のエッシャー図形や準エッシャー図形を用いてエッシャー風モザイク模様を作る方法については、後の節で解説する。

### 2-3 B型のユニット図形のリストとエッシャー図形の関係

B型の方法で切り取った3個の素片を貼り合わせることにより、図6に示す

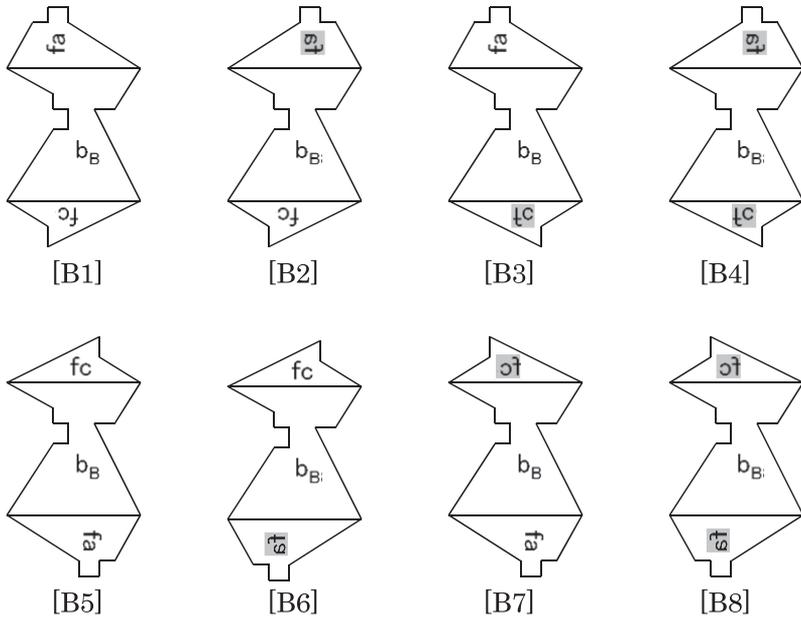


図 6 B型の8個のユニット図形の作り方

ような8個のユニット図形を組み立てることができた。図では、8個のユニット図形をB1からB8までの英数字で識別している。

ユニット図形のB1は、図3に示すB型のピースaを反時計回りに90°回転させてピース $b_B$ の上側の辺に貼り付け、ピースcを反時計回りに90°回転させてピース $b_B$ の下側の辺に貼り付けている。このB1を基本として他のユニット図形を見ると、B2はピースaが裏返しになっており、B3はピースcが裏返しになっており、B4はピースaとピースcの両方が裏返しになっている。一方、ユニット図形のB5は、B1と比較すると、ピースaとピースcの位置が入れ替わって貼り付けられている。このB5を基本として他のユニット図形を見ると、B6はピースaが裏返しになっており、B7はピースcが裏返しになっており、B8はピースaとピースcの両方が裏返しになっている。図6では、裏返しになったピースaとピースcは識別記号も裏返っているが、より明確に裏返ったことがわかるように識別記号の周りをグレーで塗りつぶしている。

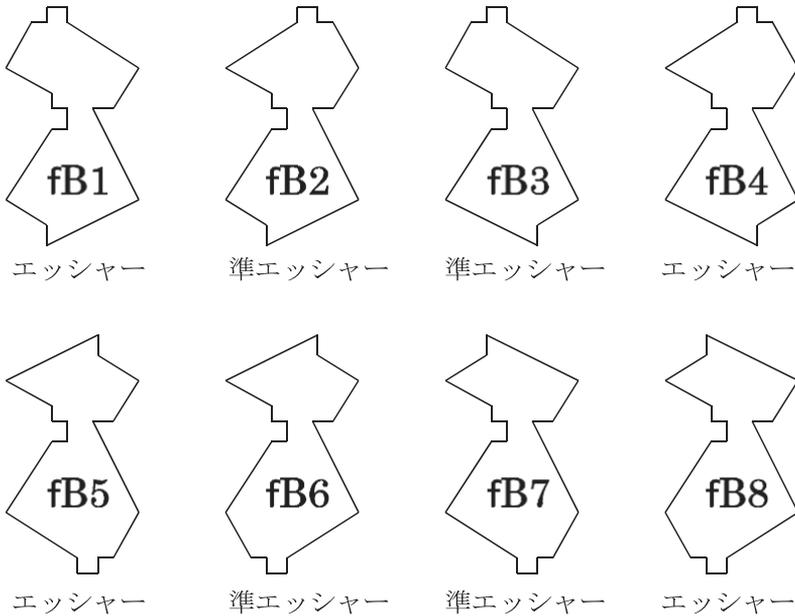


図7 B型の8個のユニット図形とエッシャー図形の関係

図7には、図6のそれぞれのユニット図形の輪郭をトレースした結果を示す。図7のそれぞれのユニット図形には、エッシャー風モザイク模様を作り上げるときに元の図形の種類や向きなどの操作情報が容易に確認できるように、図形の内部に「f」の文字と識別英数字を記入している。また、図7のそれぞれのユニット図形の下に記した「エッシャー」あるいは「準エッシャー」は、そのユニット図形の属性が、「エッシャー図形」か、あるいは「準エッシャー図形」であることを示す。

図7に示すように、B型の8個のユニット図形の全てが、エッシャー図形あるいは準エッシャー図形に属している。図7のエッシャー図形を用いてエッシャー風モザイク模様を作る方法や、異なる2種類のエッシャー図形や準エッシャー図形を用いてエッシャー風モザイク模様を作る方法については、次の節で解説する。

### 3. 16 種類のユニット図形を用いて作るいろいろな エッシャー風モザイク模様

前節では、A型とB型を合計すると、16種類のユニット図形ができることを示した。本節では、図5と図7のユニット図形のそれぞれがエッシャー図形と関連していることを、エッシャー風モザイク模様を作り上げる過程を通して証明する。

#### 3-1 A型のユニット図形からのエッシャー風モザイク模様の作成

ここでは、図5に示した8種類のA型のユニット図形から作成した様々なタイプのエッシャー風モザイク模様を紹介する。

##### 3-1-1 A型のエッシャー図形からのエッシャー風モザイク模様の作成

図5に示した8種類のユニット図形うち、エッシャー図形に属するA1、A2、A3、A4、A5、および、A8の図形から作成したエッシャー風モザイク模様を、それぞれ、図8、図9、図10、図11、図12、および、図13に示す。それぞれのモザイク模様は、図を眺めるだけでもエッシャー図形の配置が理解できると思うが、念のため、言葉での解説も行う。

図8のエッシャー風モザイク模様は、エッシャー図形のA1をそのまま格子・タイリングブロックにして2次元空間に配置している。ここで、「格子・タイリングブロック」とは、「格子ブロック」と「タイリングブロック」の両方の性質を持つ図形のことである。「格子ブロック」は、そのままの向きで2次元空間を埋め尽くすことのできる最小単位の基本図形のことを指すものとする。また、「タイリングブロック」は、そのままの向きで上下左右に配置して2次元空間を埋め尽くすことのできるブロック図形のことを指すものとする。格子ブロックやタイリングブロックは、いろいろな選び方があるが、本稿では、その中の1つを図示していることに留意する。尚、格子ブロックとタイリングブロックの違いについては、A8図形を用いたタイリング（図13）のときに再度説明する予定である。

図9のエッシャー風モザイク模様は、エッシャー図形のA2を2個用意し、

そのままの向きのもと  $180^\circ$  回転させて縦軸のまわりに裏返したものを左と右に配置して組み合わせたものを格子・タイリングブロックにして2次元空間に配置している。図9では、裏返しになったエッシャー図形は識別英数字も裏返っているが、裏返したことが簡単に認識できるように識別英数字の周りをグレーで塗りつぶした。同様に、今後のエッシャー風モザイク模様の表示においても、図形を裏返したときは、裏返したことが明確に確認できるように、識別英数字の周りをグレーで塗りつぶすことにする。尚、図形の裏返しは、断わらない限り、縦軸のまわりに行うものとする。また、図形を、角度を決めて回転させるときは、断わらない限り、平面内で反時計回りに回転させるものとする。

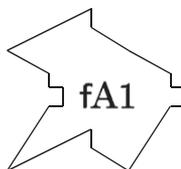
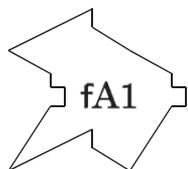
図10のエッシャー風モザイク模様は、エッシャー図形のA3を2個用意し、そのままの向きのもと裏返したものを上と下に配置して組み合わせたものを格子・タイリングブロックにして2次元空間に配置している。

図11のエッシャー風モザイク模様は、エッシャー図形のA4が4個から成る格子・タイリングブロックを作って2次元空間に配置している。その4個のA4図形を配置した格子・タイリングブロックの具体的な形は、反時計回りに、①そのままの向きのA4図形、②①を裏返した図形、③①を  $180^\circ$  回転した図形、④③を裏返した図形を組み合わせた形になっている。

図12のエッシャー風モザイク模様は、エッシャー図形のA5が4個から成る格子・タイリングブロックを2次元空間に配置している。その4個のA5図形を配置した格子・タイリングブロックの具体的な形は、反時計回りに、①そのままの向きのA5図形、②①を  $90^\circ$  回転した図形、③①を  $180^\circ$  回転した図形、④①を  $270^\circ$  回転した図形を組み合わせた形になっている。

図13のエッシャー風モザイク模様は、エッシャー図形のA8が4個から成る上段右図に示すタイリングブロックを作って2次元空間に配置している。その4個のA8図形を配置したタイリングブロックの具体的な形は、反時計回りに、①そのままの向きのA8図形、②①を  $90^\circ$  回転して裏返した図形、③①と同じ向きの図形、④②と同じ向きの図形を組み合わせた形になっている。

図13には、エッシャー図形のA8が2個から成る格子ブロックを上段中図に示している。格子ブロックだけを用いて2次元空間を埋め尽くすやり方は、



エッシャー図形

格子・タイリングブロック

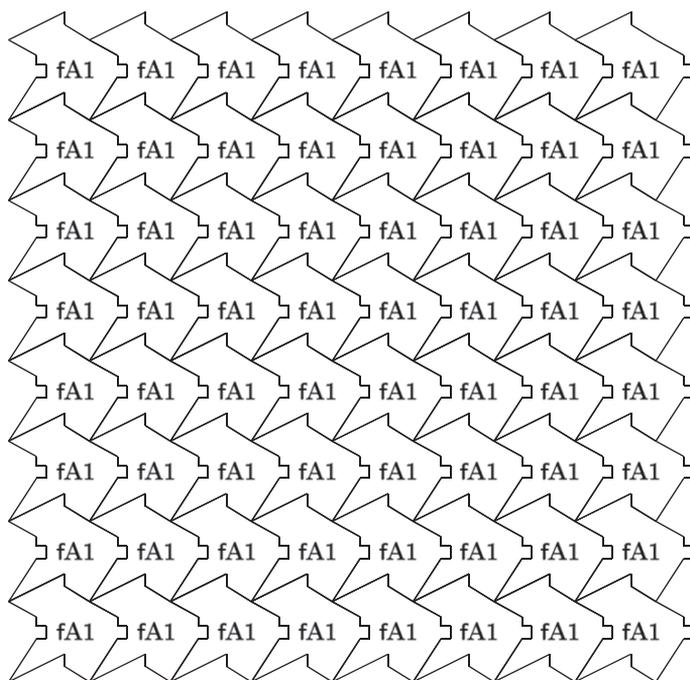


図 8 A1 から作るエッシャー風モザイク模様



エッシャー図形

格子・タイルリングブロック

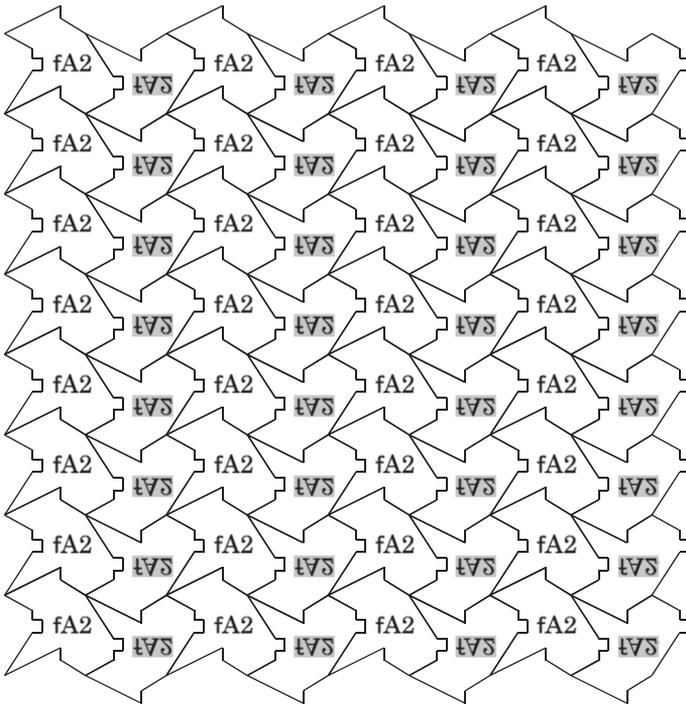
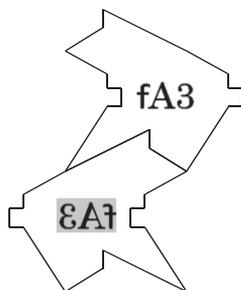
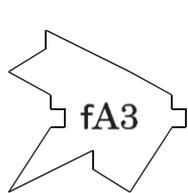


図9 A2 から作るエッシャー風モザイク模様

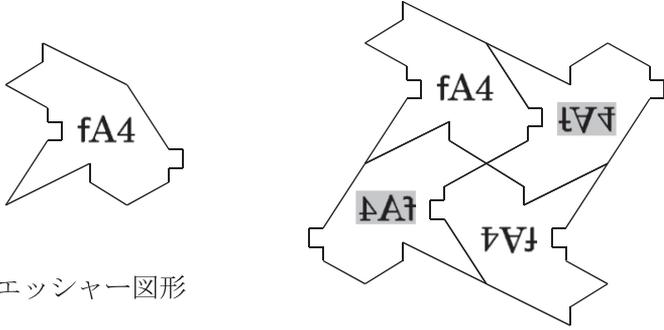


エッシャー図形

格子・タイリングブロック



図 10 A3 から作るエッシャー風モザイク模様



エッシャー図形

格子・タイリングブロック

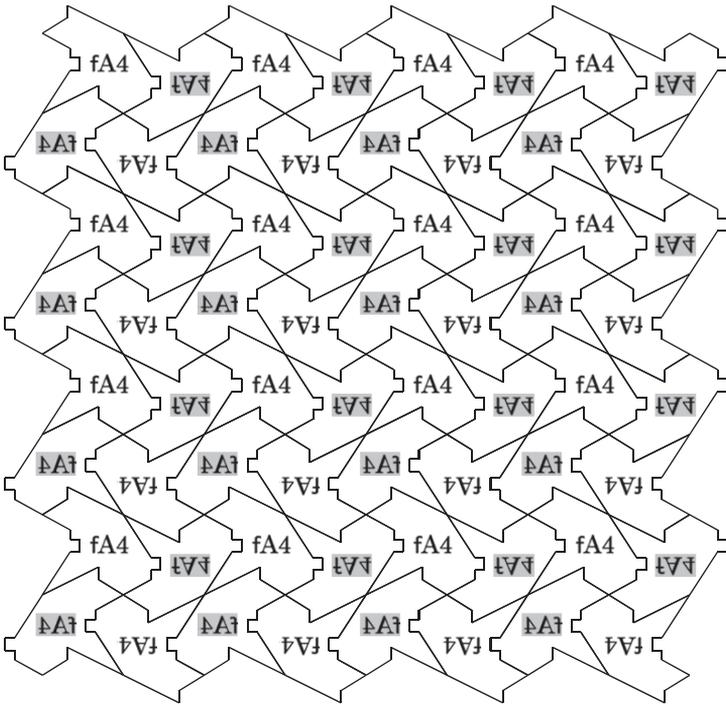
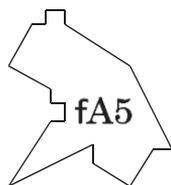
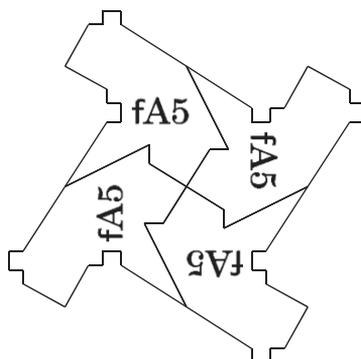


図 11 A4 から作るエッシャー風モザイク模様



エッシャー図形



格子・タイリングブロック

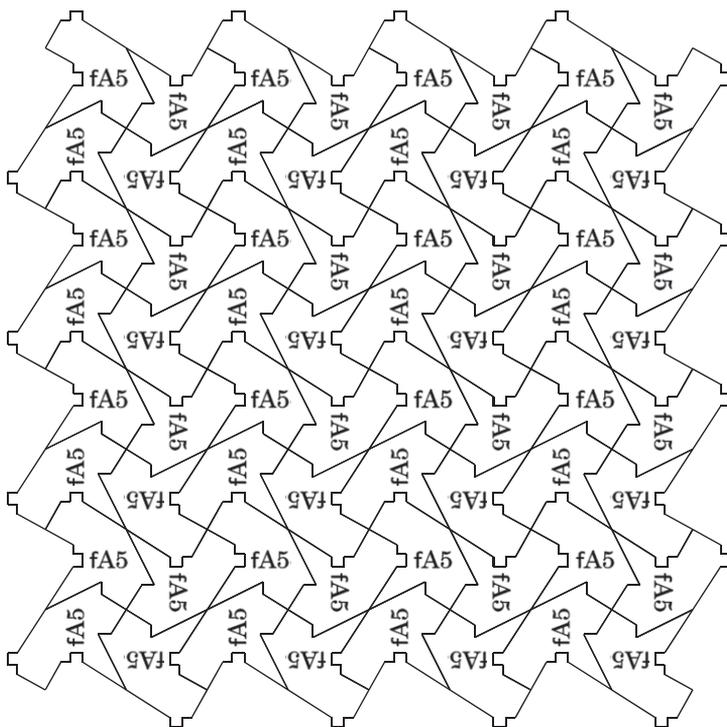


図 12 A5 から作るエッシャー風モザイク模様

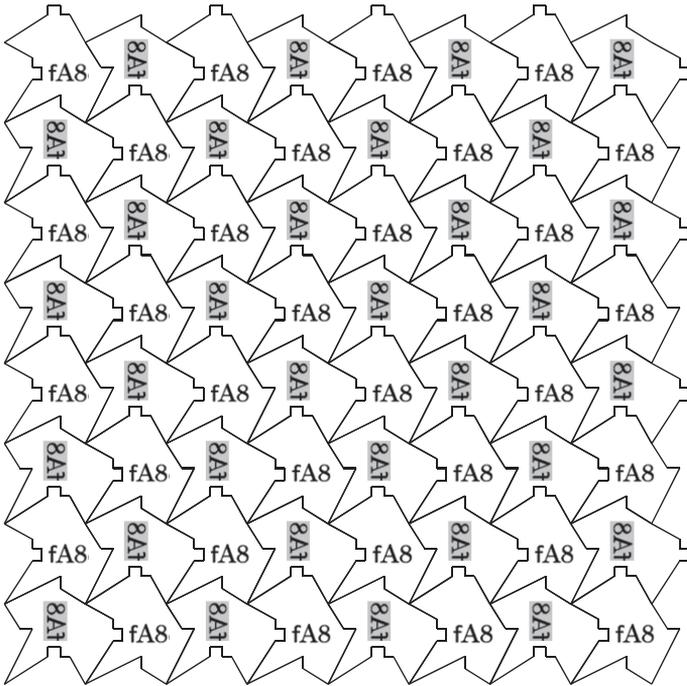
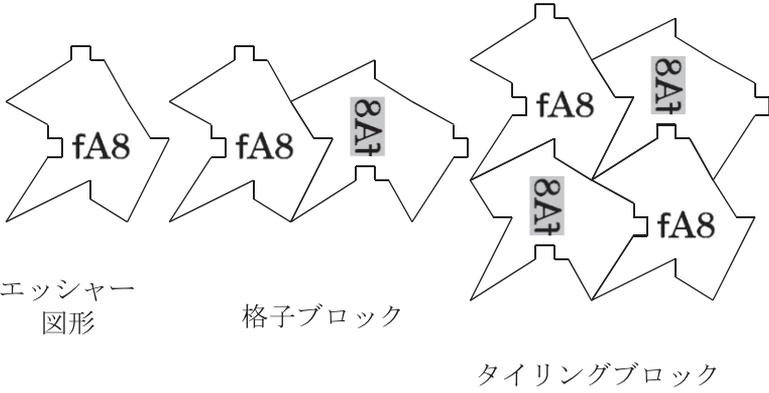


図 13 A8 から作るエッシャー風モザイク模様

最初に格子ブロックを横に並べて最上段を埋め尽くすことから始める。2 段目は、格子ブロックをユニット図形 1 個分右にスライドさせて配置してその段を埋めて行く。次の段から後も、同様にして、ユニット図形 1 個分ずつ右にスライドして格子ブロックを横に配置して空間を埋めて行く。これを繰り返すと 2 次元空間を埋め尽くすことができる。しかしこの方法は、四角形の枠内にエッシャー図形を埋め尽くしたいと思うときに、枠の近くで隙間ができてしまうので、こういう場合は図 13 上段右図のタイリングブロックを用いることになる。図 13 下段のエッシャー風モザイク模様は、このタイリングブロックを 16 個敷き詰めて作ったものである。

### 3-1-2 A型の準エッシャー図形 2 個から作成したエッシャー風モザイク模様

図 14 上段に示した準エッシャー図形の A6 と A7 は、どちらも単独ではエッシャー風モザイク模様を作ることができないので、2 つを組み合わせると図 14 中段左側に示すような複合エッシャー図形を作成した。ここで、「複合エッシャー図形」とは、複数のユニット図形を組み合わせで作ったエッシャー図形のことを指すものとする。複合エッシャー図形は、格子ブロックなどと同じように、いろいろな選び方があるが、本稿で図示したものは、その中の 1 つであるということに留意する。図 14 中段左側の複合エッシャー図形は、90° 回転させた A6 図形の右側に、裏返した A7 図形を貼り付けて作られている。一方、図 14 中段右側に示す格子・タイリングブロックは、複合エッシャー図形を上段に、裏返した複合エッシャー図形を下段に配置することで作られている。この格子・タイリングブロックを 16 個敷き詰めて作ったエッシャー風モザイク模様を、図 14 下段に示す。

### 3-1-3 A型のエッシャー図形や準エッシャー図形を 2 個使って作成した エッシャー風モザイク模様

ここでは、図 5 の A 型のユニット図形を 2 個組み合わせで作成したいろいろなエッシャー風モザイク模様の中から 5 点選んで、それぞれの構造を図 15 から図 19 に表示する。

図 15 には、エッシャー図形の A5 と準エッシャー図形の A6 を組み合わせで作ったエッシャー風モザイク模様を示す。図 15 中段左側の複合エッシャー図

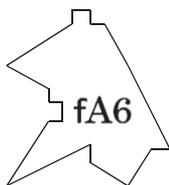
形は、A5 図形の右側に、時計回りに  $90^\circ$  回転させた A6 図形を貼り付けて作られている。図 15 中段右側の格子・タイリングブロックは、複合エッシャー図形を  $180^\circ$  回転させたり裏返したりして合計 4 個用いて構成されている。図 15 下段のエッシャー風モザイク模様は、格子・タイリングブロックを 8 個用いて構成されている。

図 16 には、エッシャー図形の A5 と準エッシャー図形の A7 を組み合わせて作ったエッシャー風モザイク模様を示す。図 16 中段左側の複合エッシャー図形は、A5 図形の上側に、 $90^\circ$  回転させた A7 図形を貼り付けて作られている。図 16 中段右側の格子・タイリングブロックは、複合エッシャー図形を  $180^\circ$  回転させたり裏返したりして合計 4 個用いて構成されている。図 16 下段のエッシャー風モザイク模様は、格子・タイリングブロックを 8 個用いて構成されている。

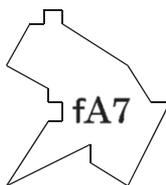
図 17 には、エッシャー図形の A1 と A2 を組み合わせて作ったエッシャー風モザイク模様を示す。図 17 中段左側の複合エッシャー図形は、A1 図形の右側に A2 図形を貼り付けて作られている。図 17 中段右側の格子・タイリングブロックは、そのままの複合エッシャー図形の右側に横軸で裏返した複合エッシャー図形を貼り付けて作られている。図 17 下段のエッシャー風モザイク模様は、格子・タイリングブロックを 16 個用いて構成されている。

図 18 には、エッシャー図形の A1 と A3 を組み合わせて作ったエッシャー風モザイク模様を示す。図 18 中段左側の複合エッシャー図形は、A1 図形の上側に、A3 図形を貼り付けて作られている。図 18 中段右側の格子・タイリングブロックは、そのままの複合エッシャー図形の下側に裏返した複合エッシャー図形を貼り付けて作られている。図 18 下段のエッシャー風モザイク模様は、格子・タイリングブロックを 16 個用いて構成されている。

図 19 には、エッシャー図形の A1 と A8 を組み合わせて作ったエッシャー風モザイク模様を示す。図 19 中段の複合エッシャー図形は、格子ブロックも兼ねており、4 個のユニット図形を 1 列に並べた構造をしている。その具体的な並び方は、最初に A1 図形、その右側に A8 図形、更にその右側に  $90^\circ$  回転して裏返した A1 図形、更にその右側に  $90^\circ$  回転して裏返した A8 図形という順



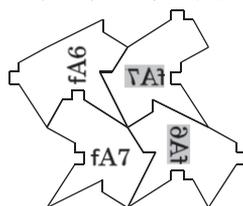
準エッシャー図形



準エッシャー図形



複合エッシャー図形



格子・タイリングブロック

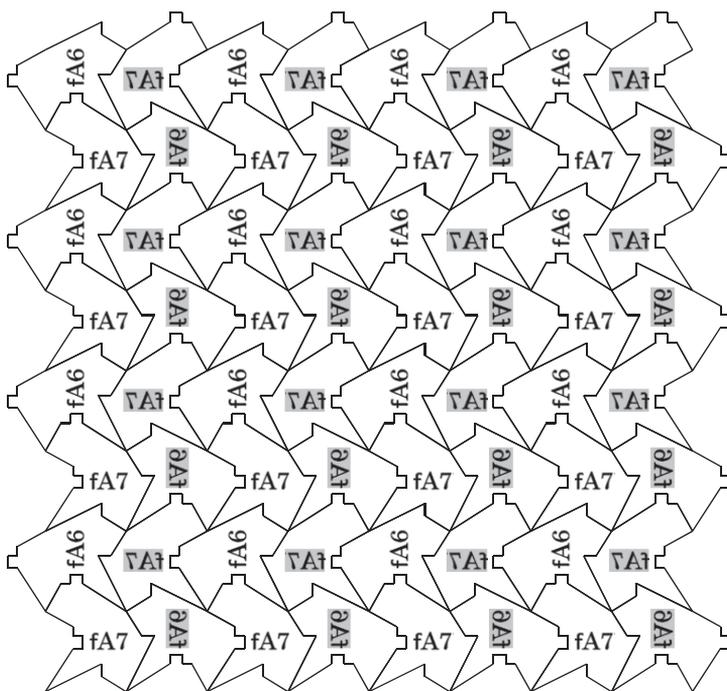
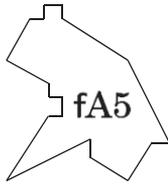


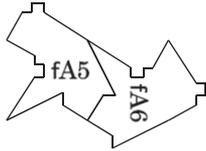
図 14 A6 と A7 から作るエッシャー風モザイク模様



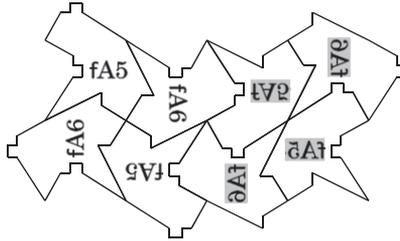
エッシャー図形



準エッシャー図形



複合エッシャー図形



格子・タイリングブロック

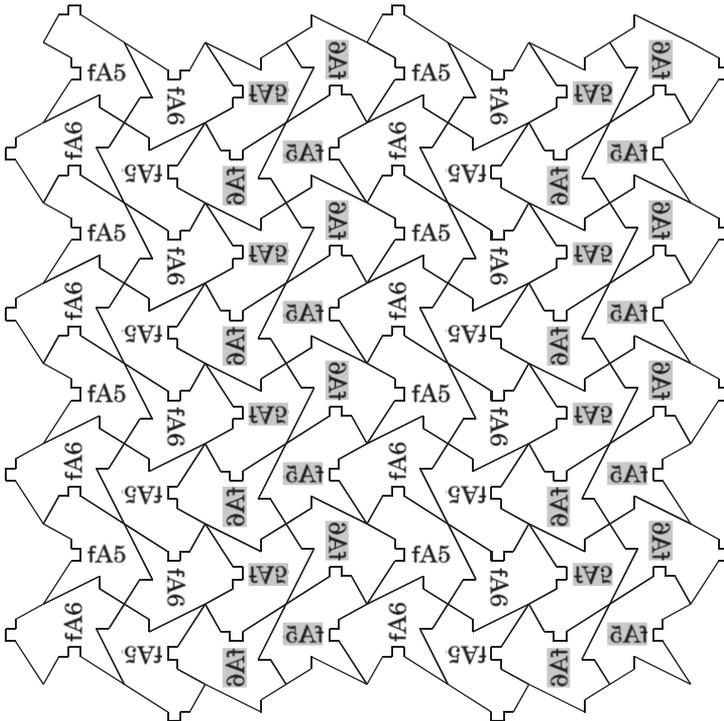


図 15 A5 と A6 から作るエッシャー風モザイク模様

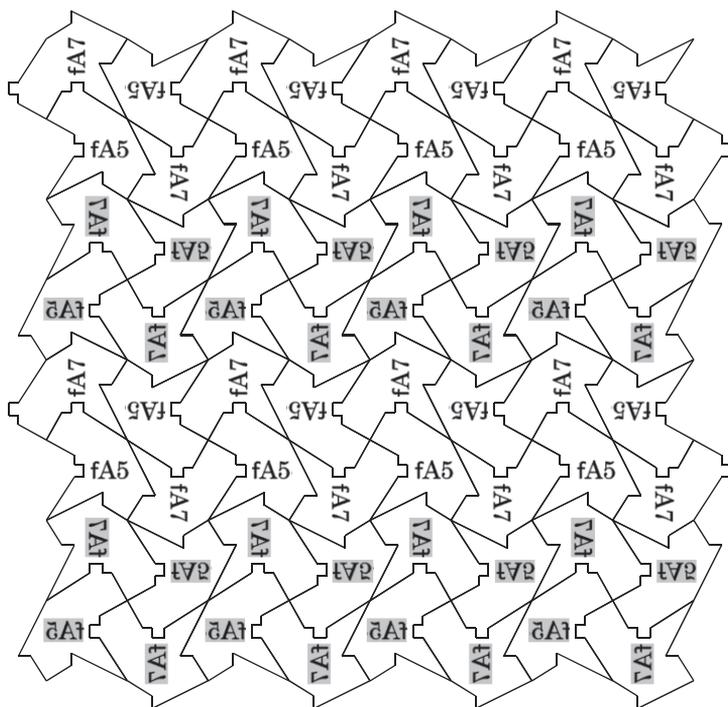
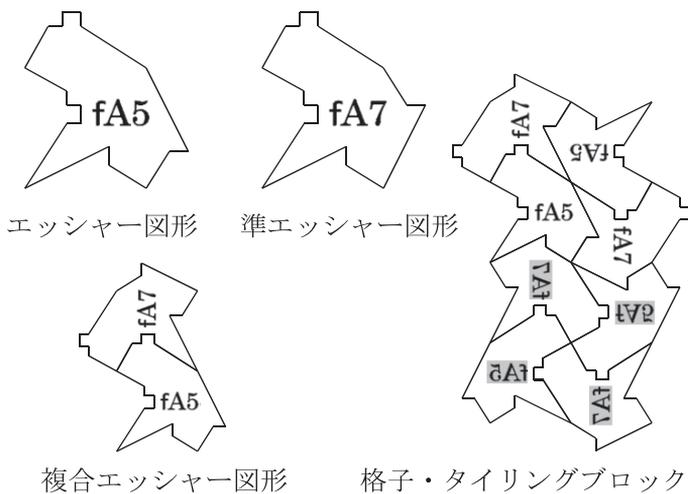
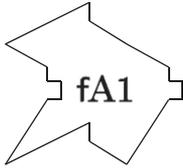
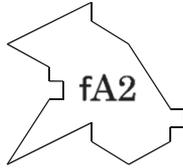


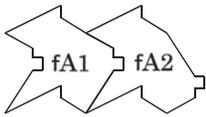
図 16 A5 と A7 から作るエッシャー風モザイク模様



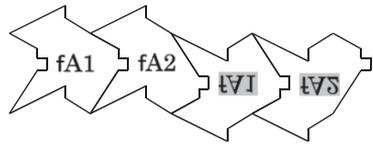
エッシャー図形



エッシャー図形



複合エッシャー図形



格子・タイリングブロック

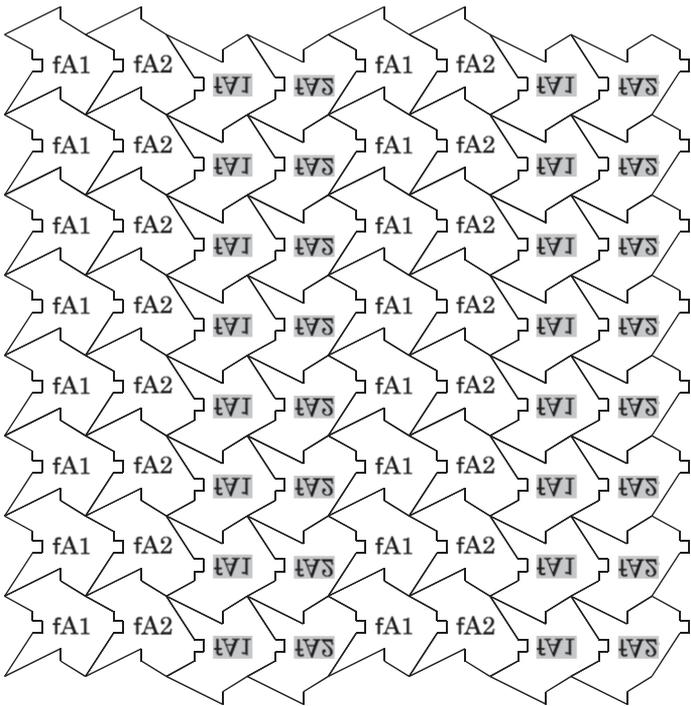
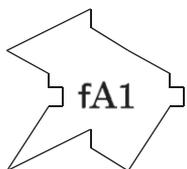
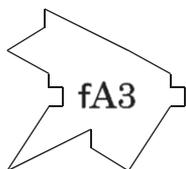


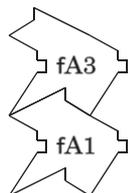
図 17 A1 と A2 から作るエッシャー風モザイク模様



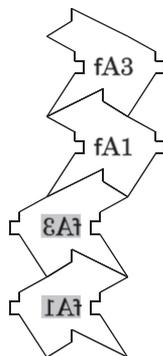
エッシャー図形



エッシャー図形



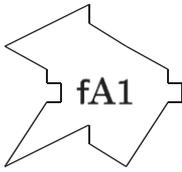
複合エッシャー図形



格子・タイリングブロック



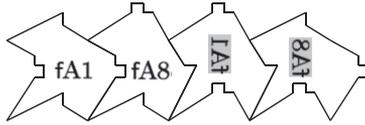
図 18 A1 と A3 から作るエッシャー風モザイク模様



エッシャー図形



エッシャー図形



複合エッシャー図形 (格子ブロック)

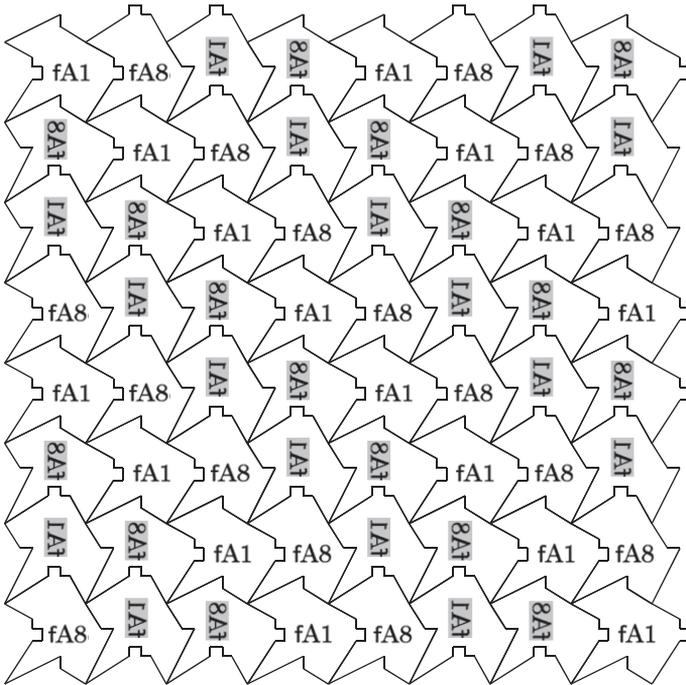


図 19 A1 と A8 から作るエッシャー風モザイク模様

になっている。格子ブロックを用いて 2 次元空間を敷き詰めるときは、最上段を敷き詰めた後に、次の段からは、ユニット図形 1 個分右にスライドさせて敷き詰めれば良い。図 19 下段のエッシャー風モザイク模様は、 $8 \times 8 = 64$  個のユニット図形からできているが、 $4 \times 4 = 16$  個のユニット図形から構成されるタイリングブロック 4 個を上下左右に並べたものになっている。

### 3-2 B型のユニット図形からのエッシャー風モザイク模様の作成

ここでは、図 7 に示した 8 種類の B 型のユニット図形から作成した様々なタイプのエッシャー風モザイク模様を紹介する。

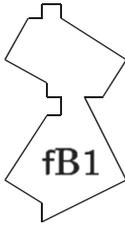
#### 3-2-1 B型のエッシャー図形からのエッシャー風モザイク模様の作成

図 7 に示した B 型の 8 種類のユニット図形うち、エッシャー図形に属する B1、B4、B5、および、B8 の図形から作成したエッシャー風モザイク模様を、それぞれ、図 20、図 21、図 22、および、図 23 に示す。

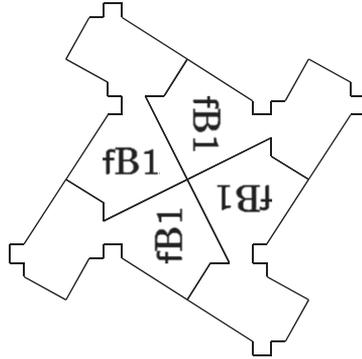
図 20 には、エッシャー図形の B1 を用いて作ったエッシャー風モザイク模様を示す。その中で、B1 図形の配置パターンは基本的に図 12 に示した A5 図形と同じような構造をしている。図 20 上段右側の格子・タイリングブロックは、向きを変えた B1 図形を 4 個貼り付けたものから構成されている。図 20 下段のエッシャー風モザイク模様は、格子・タイリングブロックを 16 個用いて構成されている。

図 21 には、エッシャー図形の B4 を用いて作ったエッシャー風モザイク模様を示す。その中で、B4 図形の配置パターンは基本的に図 13 に示した A8 図形と同じような構造をしている。図 21 上段中側の格子ブロックは、そのままの向きの B4 図形の右側に、 $90^\circ$  回転して裏返した B4 図形を貼り付けたものから構成されている。図 21 上段右側のタイリングブロックは、そのままの向きの B4 図形 2 個と、 $90^\circ$  回転して裏返した B4 図形 2 個から構成されている。図 21 下段のエッシャー風モザイク模様は、タイリングブロックを 16 個用いて構成されている。

図 22 には、エッシャー図形の B5 を用いて作ったエッシャー風モザイク模様を示す。その中で、B5 図形の配置パターンは基本的に図 20 に示した B1 図



エッシャー図形



格子・タイルングブロック

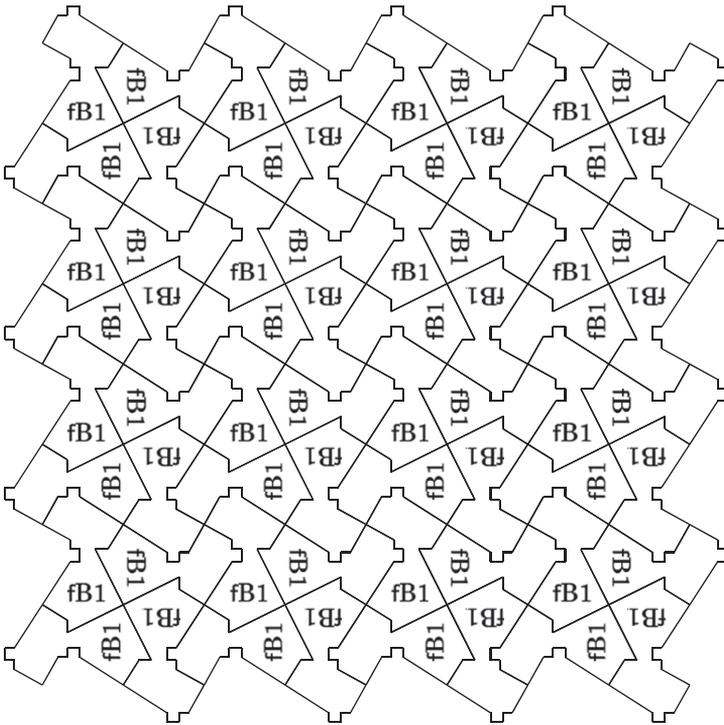


図 20 B1 から作るエッシャー風モザイク模様

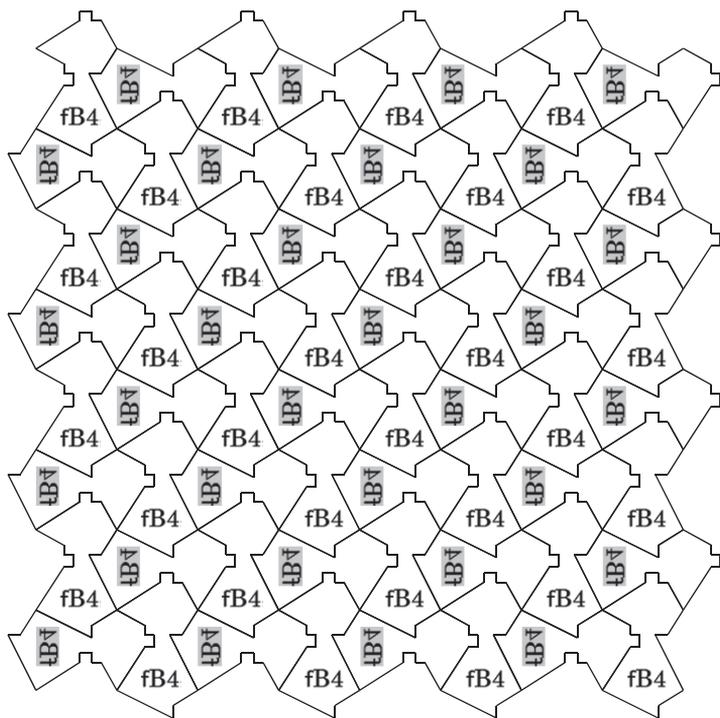
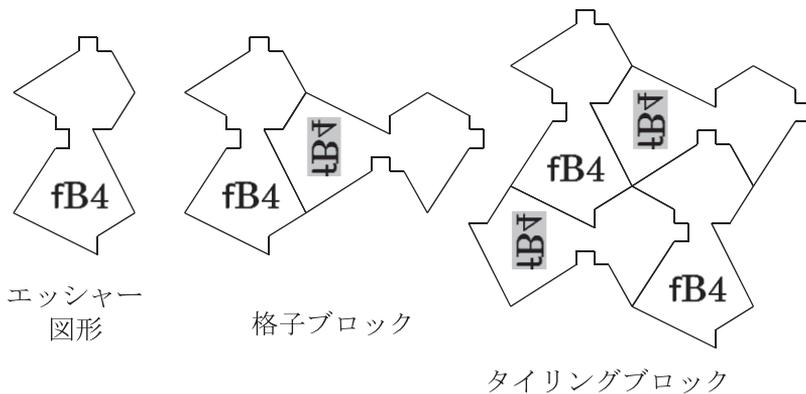
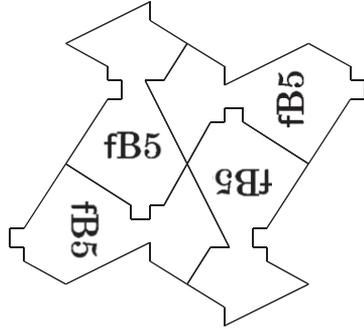
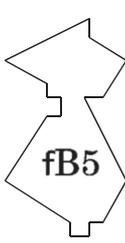


図 21 B4 から作るエッシャー風モザイク模様



エッシャー図形

格子・タイリングブロック

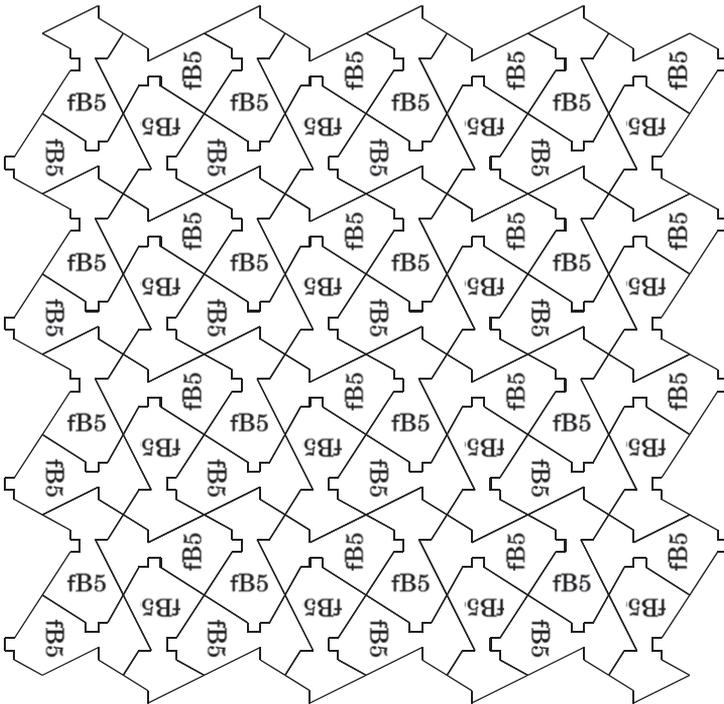


図 22 B5 から作るエッシャー風モザイク模様

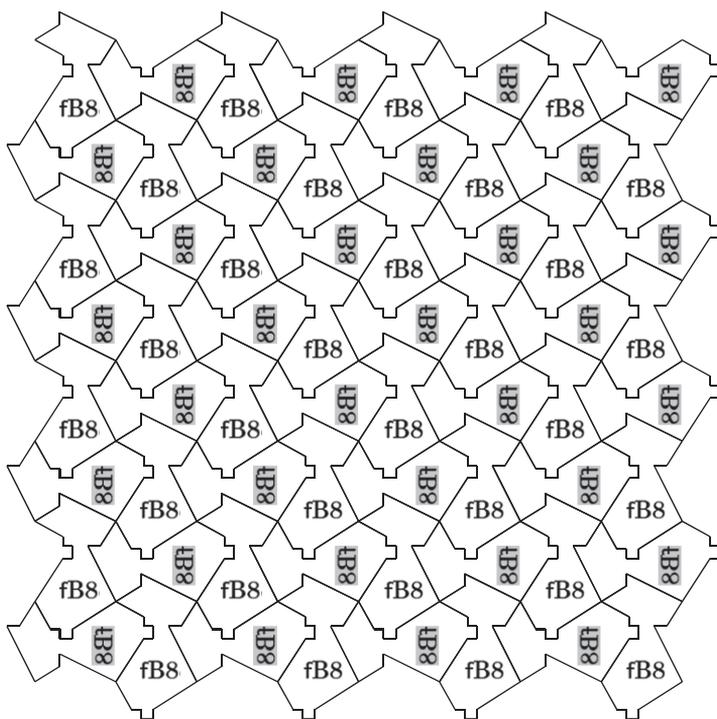
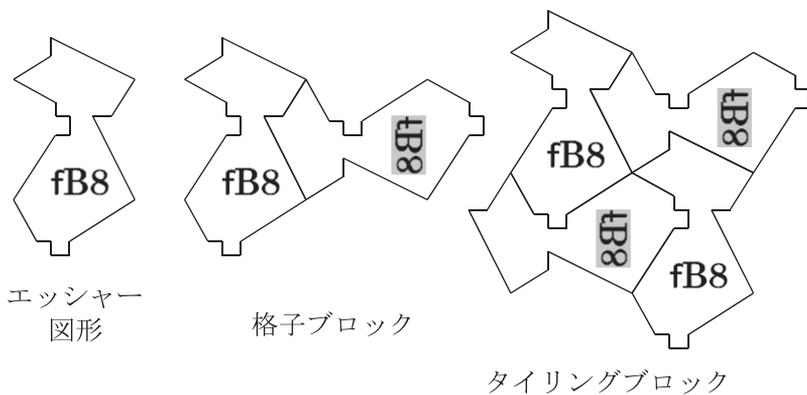


図 23 B8 から作るエッシャー風モザイク模様

形と同じような構造をしている。図 22 上段右側の格子・タイリングブロックは、向きを変えた B5 図形を 4 個貼り付けたものから構成されている。このとき、B5 図形の向きの変え方は、図 20 における B1 図形の向きの変え方と逆向きになっている。図 22 下段のエッシャー風モザイク模様は、格子・タイリングブロックを 16 個用いて構成されている。

図 23 には、エッシャー図形の B8 を用いて作ったエッシャー風モザイク模様を示す。その中で、B8 図形の配置パターンは基本的に図 21 に示した B4 図形と同じような構造をしている。図 23 上段中側の格子ブロックは、そのままの向きの B8 図形の右側に、裏返して 90° 回転させた B8 図形を貼り付けたものから構成されている。図 23 上段右側のタイリングブロックは、そのままの向きの B8 図形 2 個と、裏返して 90° 回転させた B8 図形 2 個から構成されている。図 23 下段のエッシャー風モザイク模様は、タイリングブロックを 16 個用いて構成されている。

### 3-2-2 B型の準エッシャー図形 2 個から作成したエッシャー風モザイク模様

図 7 に示した準エッシャー図形の B2、B3、B6、および、B7 は、単独ではエッシャー風モザイク模様を作ることができないので、2つの準エッシャー図形を組み合わせることでエッシャー風モザイク模様を作ることにした。結果を図 24 と図 25 に示す。

図 24 には、準エッシャー図形の B2 と B6 を組み合わせることで作ったエッシャー風モザイク模様を示す。その中で、複合エッシャー図形は、図 24 中段左図に示すように、B2 図形の上側に、90 度回転させて裏返した B6 図形を貼り付けた構造になっている。図 24 中段の中側と右側に、それぞれ、向きの異なる B2 図形 4 個からできた基本ブロック①と、向きの異なる裏返した B6 図形 4 個からできた基本ブロック②を示す。ここで、向きの異なるユニット図形 4 個の場合は、4 個のそれぞれが互いに、90 度ずつ回転しているものとする。エッシャー風モザイク模様は、図 24 下段に示すように、基本ブロック①と基本ブロック②を交互に上下左右に市松模様風に並べた形になっている。一方、格子ブロックは、図の表示は割愛しているが、基本ブロック①の右側に基本ブロック②を配置して接続したものになる。

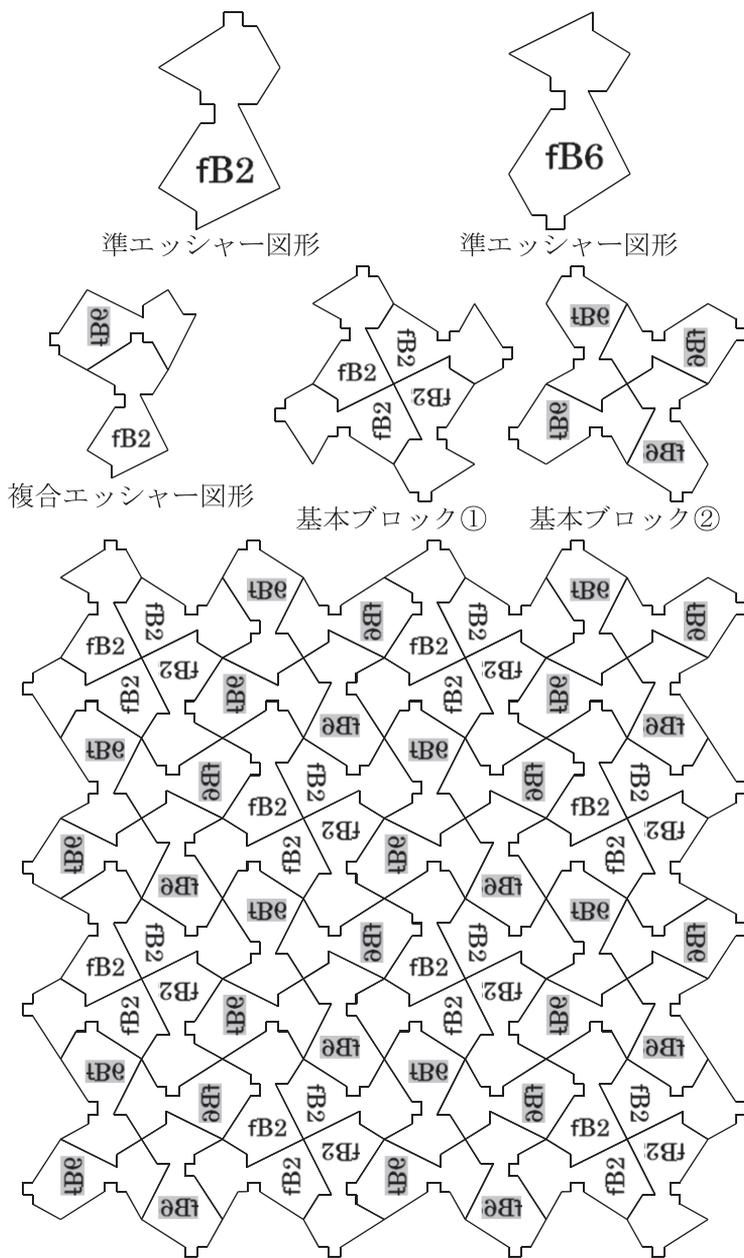


図 24 B2 と B6 から作るエッシャー風モザイク模様

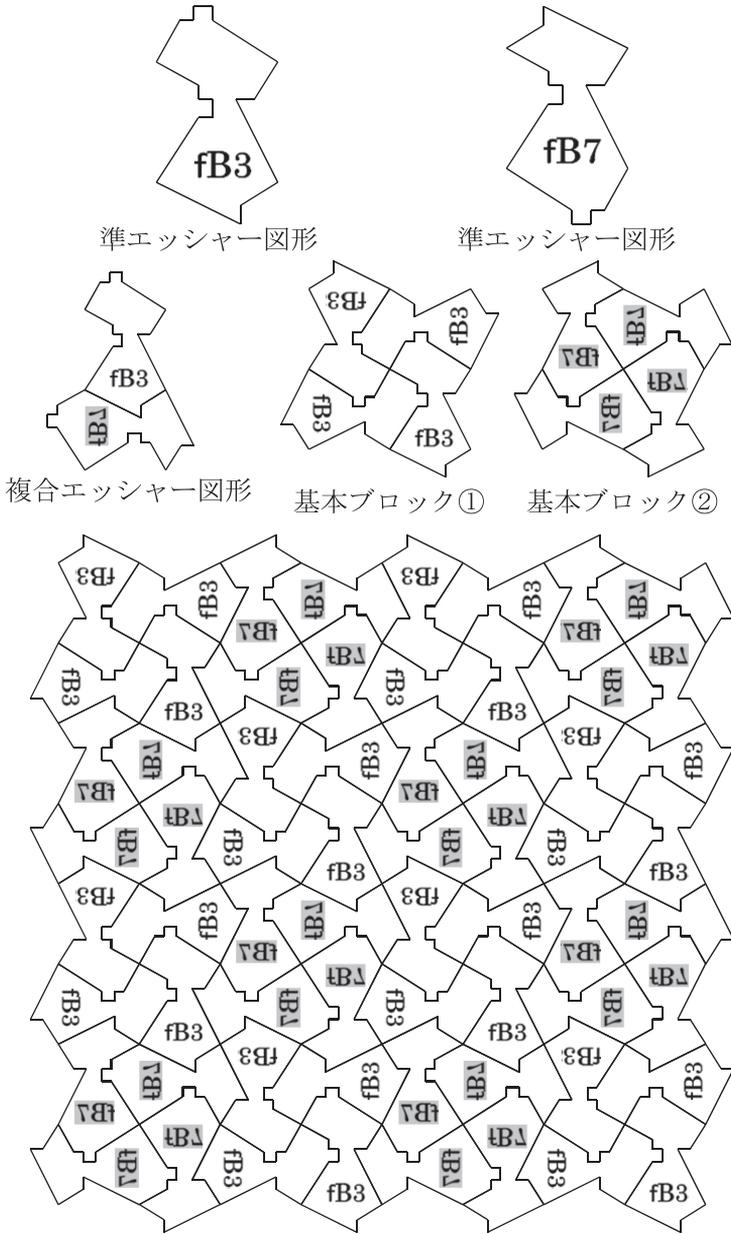


図 25 B3 と B7 から作るエッシャー風モザイク模様

図 25 には、準エッシャー図形の B3 と B7 を組み合わせて作ったエッシャー風モザイク模様を示す。その中で、複合エッシャー図形は、図 25 中段左図に示すように、B3 図形の下側に、90 度回転させて裏返した B7 図形を貼り付けた構造になっている。図 25 中段の中側と右側に、それぞれ、向きの異なる B3 図形 4 個からできた基本ブロック①と、向きの異なる裏返した B7 図形 4 個からできた基本ブロック②を示す。ここで、向きの異なるユニット図形 4 個の場合は、4 個のそれぞれがお互いに、90 度ずつ回転しているものとする。エッシャー風モザイク模様は、図 25 下段に示すように、基本ブロック①と基本ブロック②を交互に上下左右に市松模様風に並べた形になっている。一方、格子ブロックは、図の表示は割愛しているが、基本ブロック①の右側に基本ブロック②を配置して接続したものになる。

### 3-2-3 B型のエッシャー図形や準エッシャー図形を 2 個使って作成した エッシャー風モザイク模様

ここでは、図 7 の B 型のユニット図形を 2 個組み合わせて作成したエッシャー風モザイク模様の中から 6 点選んで、それぞれの構造を図 26、図 27、図 28、図 29、図 30、および、図 31 に表示する。

図 26 には、準エッシャー図形の B2 とエッシャー図形の B8 を組み合わせて作ったエッシャー風モザイク模様を示す。図 26 中段左側の複合エッシャー図形は、B2 図形の下側に、90° 回転させた B8 図形を貼り付けた構造になっている。図 26 中段右側の格子・タイリングブロックは、複合エッシャー図形を裏返したり 180° 回転させたりして合計 4 個用いて構成されている。図 26 下段のエッシャー風モザイク模様は、格子・タイリングブロックを 8 個用いて構成されている。

図 27 には、準エッシャー図形の B3 とエッシャー図形の B8 を組み合わせて作ったエッシャー風モザイク模様を示す。図 27 中段左側の複合エッシャー図形は、B3 図形の上側に、90° 回転させた B8 図形を貼り付けた構造になっている。図 27 中段右側の格子・タイリングブロックは、複合エッシャー図形を裏返したり 180° 回転させたり裏返したりして合計 4 個用いて構成されている。図 27 下段のエッシャー風モザイク模様は、格子・タイリングブロックを 8 個

用いて構成されている。

図 28 には、準エッシャー図形の B6 とエッシャー図形の B4 を組み合わせて作ったエッシャー風モザイク模様を示す。図 28 中段左側の複合エッシャー図形は、B6 図形の上側に、時計回りに  $90^\circ$  回転させた B4 図形を貼り付けた構造になっている。図 28 中段右側の格子・タイリングブロックは、複合エッシャー図形を裏返したり  $180^\circ$  回転させたりして合計 4 個用いて構成されている。図 28 下段のエッシャー風モザイク模様は、格子・タイリングブロックを 8 個用いて構成されている。

図 29 には、準エッシャー図形の B7 とエッシャー図形の B4 を組み合わせて作ったエッシャー風モザイク模様を示す。図 29 中段左側の複合エッシャー図形は、B7 図形の下側に、時計回りに  $90^\circ$  回転させた B4 図形を貼り付けた構造になっている。図 26 中段右側の格子・タイリングブロックは、複合エッシャー図形を裏返したり  $180^\circ$  回転させたりして合計 4 個用いて構成されている。図 29 下段のエッシャー風モザイク模様は、格子・タイリングブロックを 8 個用いて構成されている。

図 30 には、エッシャー図形の B1 と B4 を組み合わせて作ったエッシャー風モザイク模様を示す。図 30 中段左側の複合エッシャー図形は、B1 図形の下側に、 $90^\circ$  回転させた B4 図形を貼り付けた構造になっている。図 30 中段右側の格子・タイリングブロックは、複合エッシャー図形の右側に、 $90^\circ$  回転させて裏返した B4 図形の下側に裏返した B1 図形を配置した別種の複合エッシャー図形を、貼り付けた構造になっている。図 30 下段のエッシャー風モザイク模様は、格子・タイリングブロックを 16 個用いて構成されている。

図 31 には、エッシャー図形の B1 と B5 を組み合わせて作ったエッシャー風モザイク模様を示す。図 31 中段左側の複合エッシャー図形は、格子ブロックも兼ねており、B1 図形の下側に  $90^\circ$  回転させた B5 図形を貼り付けた構造になっている。図 31 中段右側のタイリングブロックは、複合エッシャー図形の右側に、 $90^\circ$  回転させた B5 図形の下側に B1 図形を配置した別種の複合エッシャー図形を、貼り付けた構造になっている。図 31 下段のエッシャー風モザイク模様は、タイリングブロックを 16 個用いて構成されている。

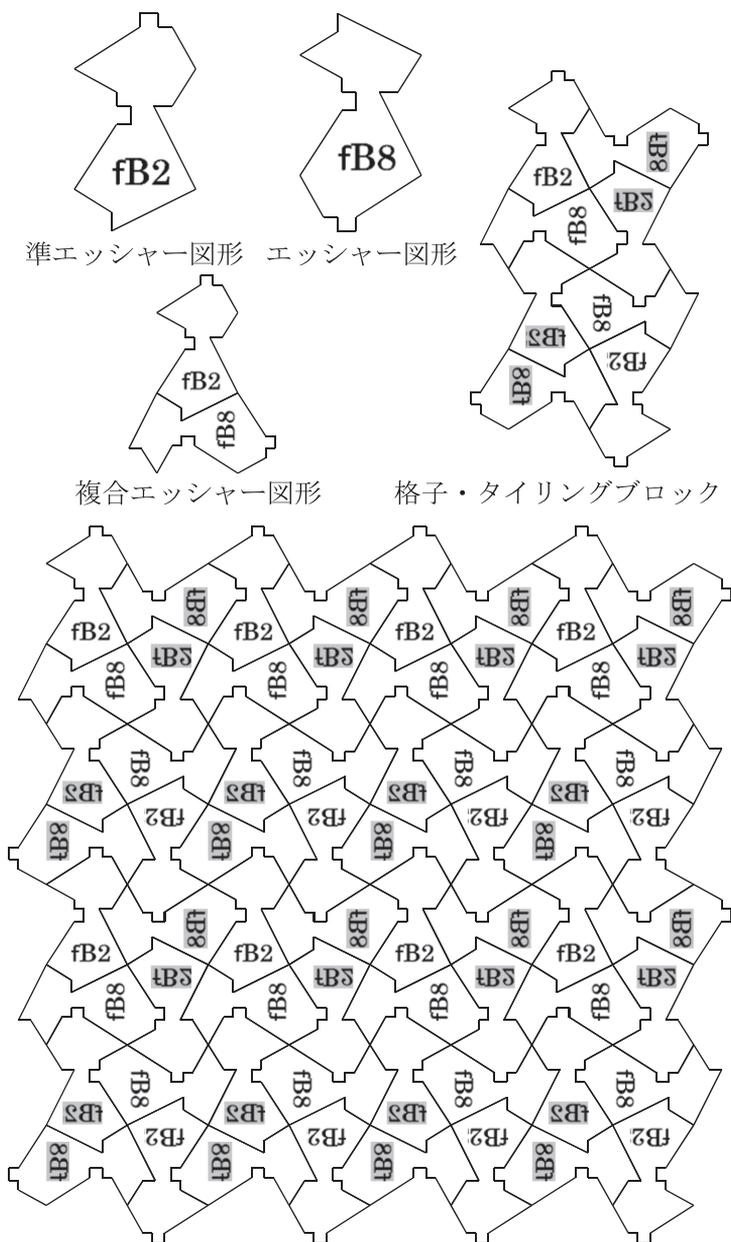
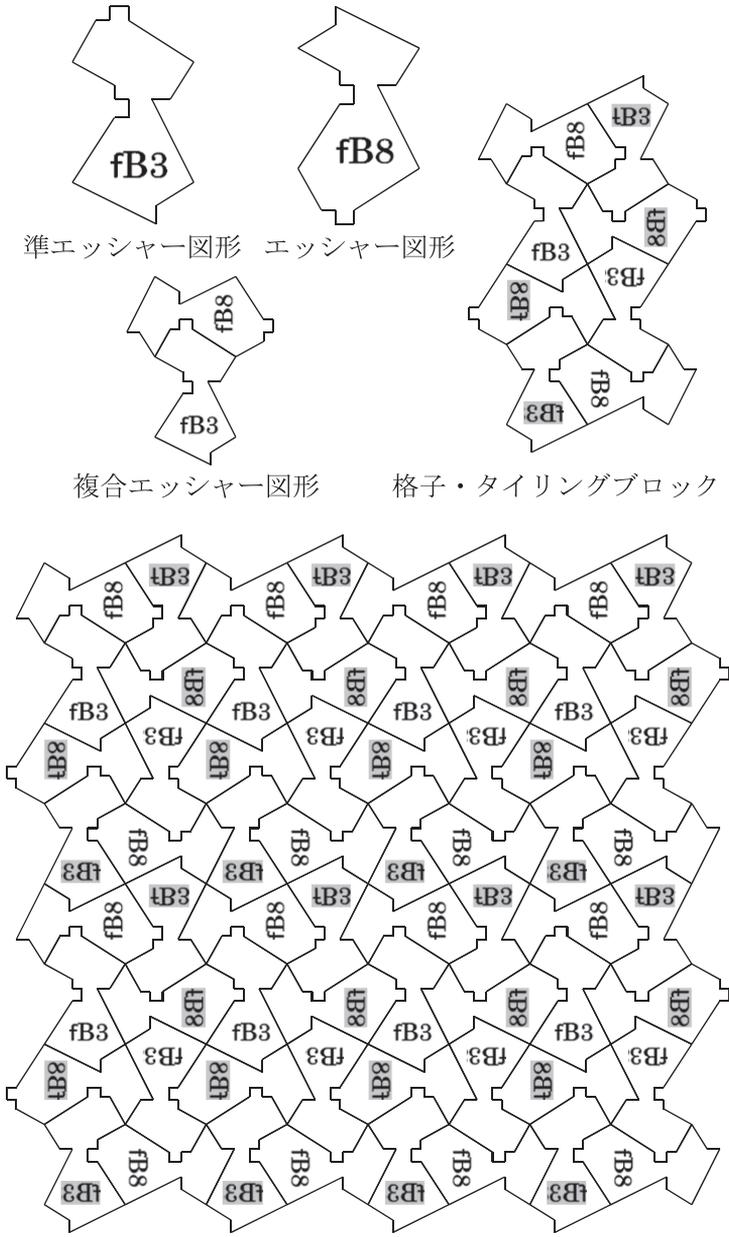


図 26 B2 と B8 から作るエッシャー風モザイク模様



準エッシャー図形    エッシャー図形

複合エッシャー図形    格子・タイルングブロック

図 27 B3 と B8 から作るエッシャー風モザイク模様

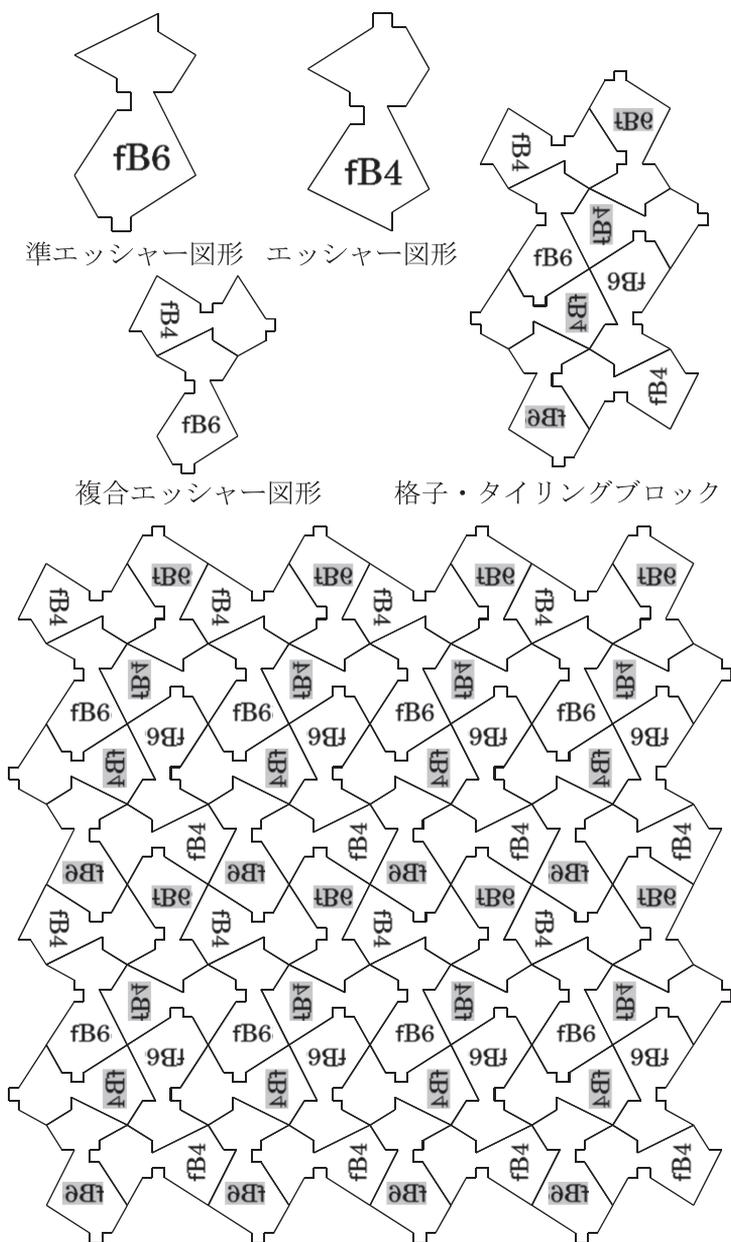


図 28 B6 と B4 から作るエッシャー風モザイク模様

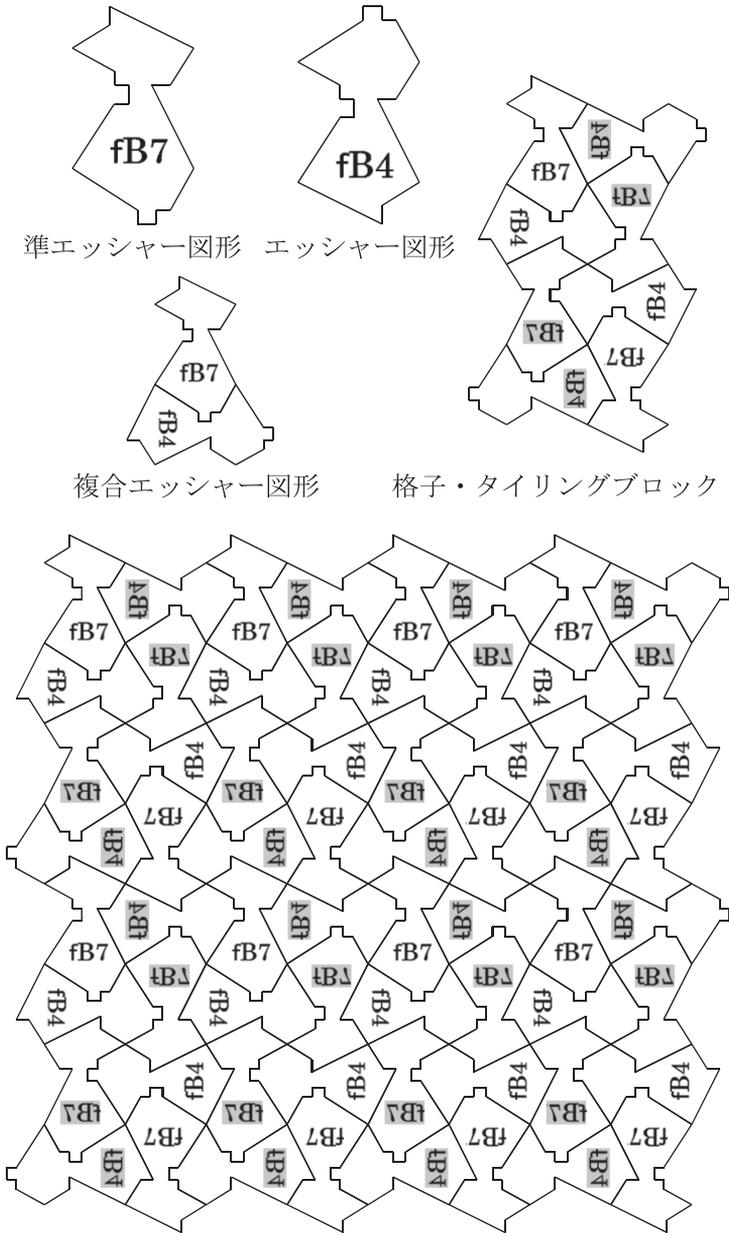


図 29 B7 と B4 から作るエッシャー風モザイク模様

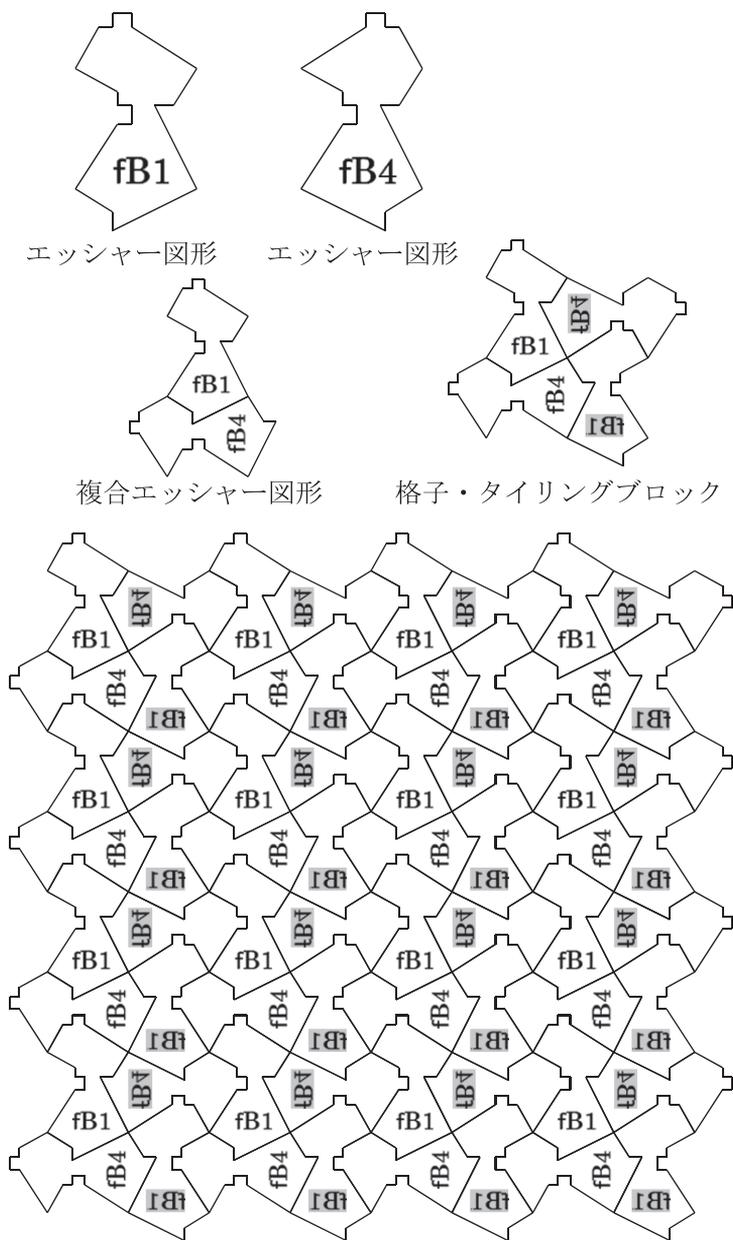
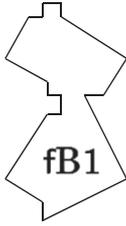
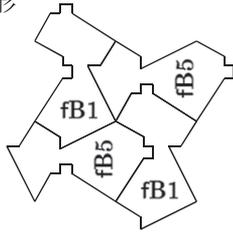
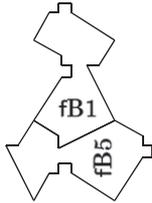


図 30 B1 と B4 から作るエッシャー風モザイク模様



エッシャー図形

エッシャー図形



複合エッシャー図形  
(格子ブロック)

タイルングブロック

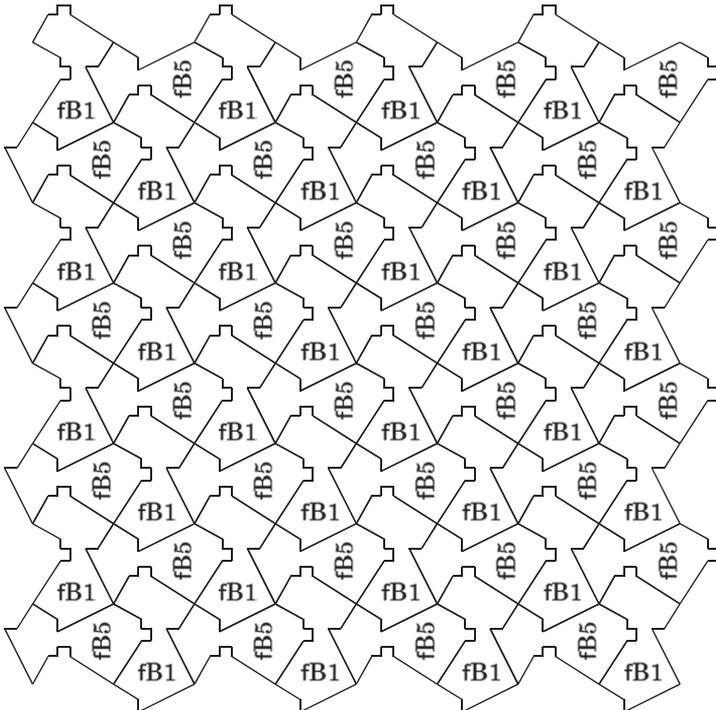


図31 B1とB5から作るエッシャー風モザイク模様

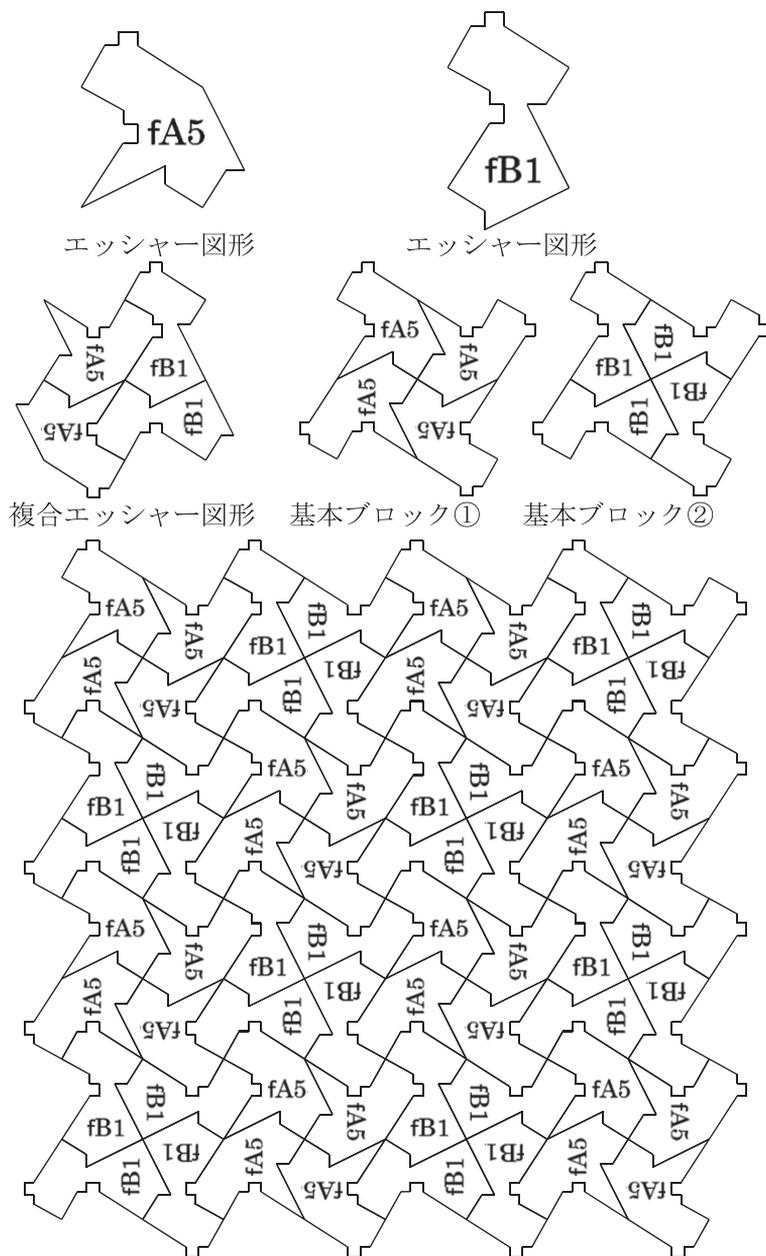
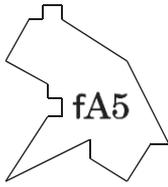


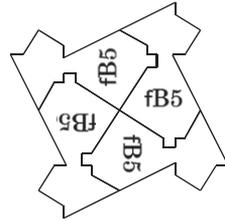
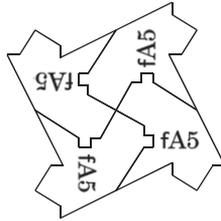
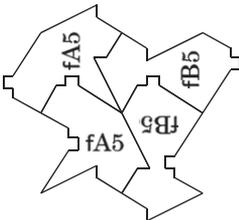
図 32 A5 と B1 から作るエッシャー風モザイク模様



エッシャー図形



エッシャー図形



複合エッシャー図形

基本ブロック①

基本ブロック②

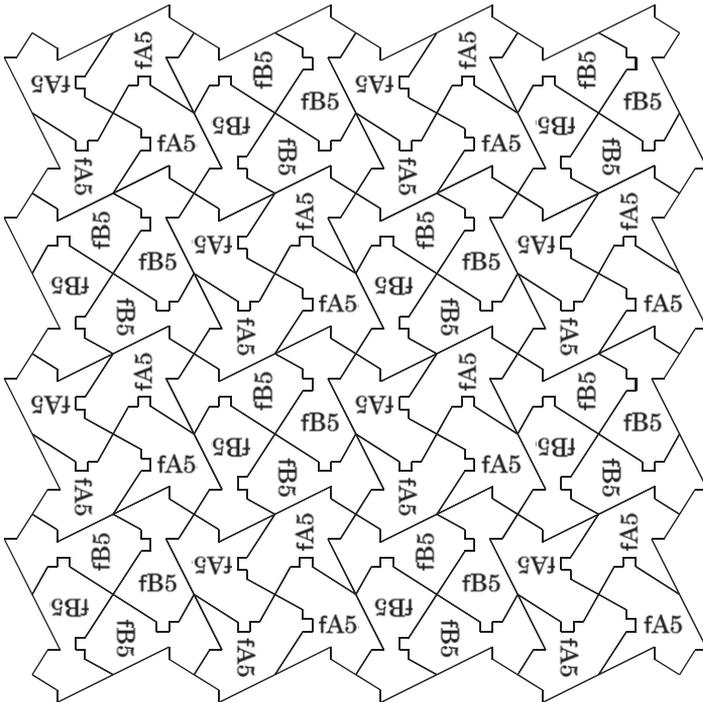


図 33 A5 と B5 から作るエッシャー風モザイク模様

### 3-3 A型とB型のユニット図形の両方を含むエッシャー風モザイク模様

A型とB型は、図3に示すようにピースbの切り取り方が違うので通常は混在しないが、切り取り曲線を書き写すなどの方法を用いると混在が可能となる。ここでは、A型とB型のユニット図形の両方を含むエッシャー風モザイク模様の例を図32と図33に示す。

図32には、A型のエッシャー図形のA5とB型のエッシャー図形のB1を組み合わせで作ったエッシャー風モザイク模様を示す。その中で、複合エッシャー図形は、図32中段左図に示すように、向きの異なるA5図形2個と、向きの異なるB1図形2個から構成されている。図32中段の中図と右図に、それぞれ、向きの異なるA5図形4個からできた基本ブロック①と、向きの異なるB1図形4個からできた基本ブロック②を示す。ここで、向きの異なるユニット図形4個の場合は、4個のそれぞれがお互いに、90度ずつ回転しているものとする。基本ブロック①と②の外形が同じ形をしているので、基本ブロック①と②をいかなる順番で並べてもエッシャー風モザイク模様ができあがる。図32下段には、基本ブロック①と②を市松模様風に並べた場合のエッシャー風モザイク模様を示す。

図33には、A型のエッシャー図形のA5とB型のエッシャー図形のB5を組み合わせで作ったエッシャー風モザイク模様を示す。その中で、複合エッシャー図形は、図33中段左図に示すように、向きの異なるA5図形2個と、向きの異なるB5図形2個から構成されている。図33中段の中図と右図に、それぞれ、向きの異なるA5図形4個からできた基本ブロック①と、向きの異なるB5図形4個からできた基本ブロック②を示す。ここで、向きの異なるユニット図形4個の場合は、4個のそれぞれがお互いに、90度ずつ回転しているものとする。基本ブロック①と②の外形が同じ形をしているので、基本ブロック①と②をいかなる順番で並べてもエッシャー風モザイク模様ができあがる。図33下段には、基本ブロック①と②を市松模様風に並べた場合のエッシャー風モザイク模様を示す。

## おわりに

本稿では、正方形の紙を切り貼りすることにより、A型8種類、B型8種類、合計16種類のユニット図形を作成した。その中で、A型のエッシャー図形は、A1、A2、A3、A4、A5、および、A8の6種類、B型のエッシャー図形は、B1、B4、B5、および、B8の4種類あることを、エッシャー風モザイク模様を作り上げる過程を通して示した。また、ユニット図形を2個組み合わせれば多種多様なエッシャー風モザイク模様ができることを示し、16種類のユニット図形の全てがエッシャー図形と関連していることを示すことができた。16種類のユニット図形を用いればたくさんのエッシャー風モザイク模様を作ることができるが、本稿では、その中からA型からのものを12点、B型からのものを12点、A型とB型を組み合わせで作ったものを2点紹介した。

今回提示したエッシャー図形の作り方は、正方形の紙を任意の自由な曲線で切り取るアナログの手法が主体となるので、教育現場の教材としての導入が容易になるだけでなく、製作者自身の芸術的センスも発揮し易くなる。今回16種類のユニット図形を紹介したが、空間的に配置しやすい図形に対しては、本稿に類似した制作方法が、解説書や教育実践などの報告書の中ですでに紹介されている[9-16]。その中で、特に扱いが易しいA1図形は、小学生を対象とした発展的学習の教材として使われている[15, 16]。中学生や自然科学教室の受講者を対象にする場合は、A1図形の他に、A3図形、A5図形、および、B5図形を用いたエッシャー風モザイク模様の作り方の紹介も行われている[11, 12, 13]。

正方形の紙の切り取り方について、本稿では、正方形の4つの頂点をピースbの中に残す方法を採用した。その他の方法として、正方形の紙からピースaを切り取った直後に残り3辺の1つにピースaを貼り付けた後に、ピースcを、ピースbの頂点の1つとピースaの一部を含むように、大胆に切り取ってピースbの残りの直線部分に貼り付けることにより、ピースbには3つの頂点しか残さないという方法もある。この方法を用いると本稿で示したユニット図形とは少し雰囲気の違う基本図形が現れるのでエッシャー図形による表現の自由

度が広がる。

最後に数学的な観点でコメントする。今回、提示したユニット図形の作り方は、切り取る曲線の始点と終点の間の直線距離が正方形の一辺の長さと等しくなる 2 種類の曲線を 2 組ずつ用意し、台紙に貼り付けた正方形の 2 辺に、同じ組の曲線を外向き（凸）と内向き（凹）なるように貼り付けて作るユニット図形の問題に置き換えることができる。2 組の曲線のそれぞれを  $a$  と  $\beta$  のグループ名で識別すると、任意のユニット図形の外周は、凸 $_a$ 、凹 $_a$ 、凸 $_\beta$ 、凹 $_\beta$  の 4 つの曲線で囲まれることになる。この場合、曲線を並べる順番や曲線の裏返しの有無などの状況を全て取り上げて組み合わせを考えると、ユニット図形は 32 種類できあがる。本稿では、その中で 16 種類のユニット図形だけを取り上げた。何故なら、図 3 でピース  $b_A$  とピース  $b_B$  を切り取る時、凹 $_a$  と凹 $_\beta$  の組み合わせを 1 種類だけ考えたからである。もし、凹 $_a$  か凹 $_\beta$  のどちらかを裏返したピース  $b_A$  やピース  $b_B$  も含めるなら、ユニット図形は 32 種類になる。しかし、この場合でも、新たに加わる 16 種類のユニット図形を用いてエッシャー風モザイク模様を作るときは、本稿で紹介したユニット図形の配置法がそのままの形で適用できる。32 種類のユニット図形を考えることで新たに問題になるのは、元の 16 種類のユニット図形と新しく加わる 16 種類のユニット図形を混合してエッシャー風モザイク模様を作る場合だけである。この場合は、図形の形としての面白さというよりも、数学的な面白さがある。

## 謝辞

本研究は、JSPS 科研費・基盤研究（C）（一般）（代表者：松村敬治，課題番号 16K00980）の助成を受けて行ったものである。

## 参考文献

- [1] M. C. エッシャー（著）、坂根巖夫（訳）『無限を求めて—エッシャー、自作を語る（朝日選書）』朝日新聞社（1994）。
- [2] 伏見康治、安野光雅、中村義作『美の幾何学—一天のたくらみ、人のたくみ（中公新書 554）』中央公論社（1979）；伏見康治、安野光雅、中村義作『美の幾何学—一天のたくらみ、人のたくみ（ハヤカワ文庫 NF 370）』早川書房（2010）。

- [3] 中村義作『エッシャーの絵から結晶構造へ』海鳴社 (1983). : 福田 宏、中村義作『エッシャーの絵から結晶構造へ (増補版) (バウンダリー叢書)』海鳴社 (2013).
- [4] 杉原厚吉『タイリング描法の基本テクニク—エッシャーの技法で不思議な絵を描く』誠文堂新光社 (2009).
- [5] 杉原厚吉『エッシャー・マジック — だまし絵の世界を数理で読み解く』東京大学出版会 (2011).
- [6] 杉原厚吉「エッシャー風タイリングアートの自動生成」応用数理 19 (2), 74-83 (2009).
- [7] 木佐貫恵、待井寛史、崎元健公、小野智司、水野一徳、中山茂「エッシャー風タイリング画像作成支援システム」情報処理学会研究報告 95 (15), 1-6 (2013).
- [8] 川出静、今堀慎治「2 種類の図形によるタイリング生成における図形の選択方法」数理解析研究所講究録 1931, 107-128 (2015).
- [9] マイク・アスキュー & シーラ・エバット (著)、ピーター・フランクル (監修)、緑慎也 (訳)『幾何学：ピタゴラスの定理からメビウスの帯まで (大人のためのやり直し講座)』創元社 103-126 (2012).
- [10] 秋山仁「美の背後に潜む数理」日本数学会 数学通信 17 (2), 6-18 (2012).
- [11] 上村文隆「数学と自然や社会のつながりを探究する実践事例 [エッシャーのように絵をかこう — 誰でもできるエッシャー図形のつくり方]」数学教育 2009 (7), 56-61 (2009).
- [12] 岡田晃次「敷き詰め模様」数学教育 2010 (4), 42-44 (2010).
- [13] 野呂茂樹「切り紙でエッシャー模様もどき (1), (2), (3)」野呂茂樹のホームページ (<http://sky.geocities.jp/noroshigeki32/mokuji6.htm>) から
- [14] 橋本吉貴「図形の敷き詰めに関する一考察 — 鎌倉女子大学における授業実践を通して —」鎌倉女子大学紀要 13, 93-100 (2006).
- [15] 太田直樹「授業紹介 エッシャーの合同な平面模様」(<http://www.notredame-ed.jp/archive/2012/1V10660V100Vhtml.html>) ノートルダム学院小学校のホームページから
- [16] 大和田裕子「科学系博物館における「変換」概念の学習可能性に関する研究 — エッシャーを題材に —」筑波大学数学教育学研究室発行：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究 13, 257-272 (2006).