非対称的な内生的賞金決定型コンテスト：線形賞金関数のケース*

平　井　秀　明

要旨：本稿では，コンテストの賞金がプレイヤーの努力水準に依存して決まる内生的賞金決定型コンテスト・ゲームを考える。当該コンテストにおける均衡の存在と一意性を示し，さらに線形の賞金関数を想定したうえで比較静学分析を行った結果，次の二つが示された。一つは，均衡におけるコンテスト参加者全体の努力水準は，各プレイヤーの賞金の本源的価値や全体の努力水準が賞金に及ぼす正の外部性が高まるにつれて増加する。二つに，そうした全体の努力水準の上昇が一人ひとりのプレイヤーの努力水準に及ぼす影響は，均衡におけるプレイヤーの賞金獲得確率ないしはシェアの優位性に依存することが示された。

キーワード：コンテスト・ゲーム，内生的賞金，均衡の存在と一意性，比較静学

JEL classification: C72, D43, D72

1．はじめに

コンテスト・ゲームとは，コンテスト参加者（プレイヤー）が所与の賞金

＊　西南学院大学に奉職して以来，尾上修悟教授からは研究・教育活動に関して温かいご教授を賜ってきたこと，この場を借りて謝意を表させていただきたい。謹んで本論文をご定年を迎えられる尾上修悟教授にささげたい。

（レント）を求め，その獲得確率ないしはシェアを高めるためにコンテストへの投資・努力水準を決定する非協力ゲームである。例えば，レントシーキングに伴う社会的費用を理論的に分析した Tullock（1980）によるレントシーキング・ゲーム（タロック型コンテスト）は，当該分野の代表的な先行研究の一つである。特許を求めての R&D 競争（Loury, 1979），市場シェア拡大に向けての広告競争（Friedman, 1958）も応用分野として挙げられる。また，Szidarovszky and Okuguchi（1997）が指摘したように，需要曲線として双曲線関数を想定したクールノー・ゲームはレントシーキング・ゲームとモデル構造が等しくなる。さらに，コンテスト・ゲームにおける各プレイヤーの（期待）利潤関数は，自身の戦略と全プレイヤーの戦略の総計で構成されているため，aggregative game の一例としても捉えることができる（Dubey *et al*., 1980）。

このようにコンテスト・ゲームは，多様な応用分野を内包し研究が積み重ねられているが，既存研究においてはコンテストにおける賞金を外生的に所与と想定することが多い[1]。しかし，上述した R&D 競争や広告競争をはじめとして，社会・経済現象をコンテスト・ゲームとして分析する際は，賞金が内生的に決まると想定することがもっともらしケースがある。たとえば，何らかの医薬品の特許を目指した研究開発競争においては，各社の研究開発投資に伴って当初の想定以上に当該医薬品が市場価値をもつことが明らかになることはあるだろう。また，ある企業による商品広告は，類似の商品を扱う他企業にも当該財の市場規模拡大など正の外部性を及ぼすことが指摘されている（Bell *et al*., 1975; Friedman, 1983）。こうした，コンテスト参加者の投資水準がコンテストの賞金価値に正の外部性を及ぼす内生的賞金決定型コンテストは Chung（1996）によってはじめて分析された。さらに，Shaffer（2006）は，コンテスト参加者の投資が賞金の価値を低下させる状況も想定した。そうした状況の具体例としては，紛争（military conflict）が挙げられる。たとえば，特定の地域を巡っての武力衝突は，当該地域を著しく毀損させうる。すなわち，こうしたケースではプレイヤーのある種の努力が負の外部性として働いてしまう。

1　詳しくは，Konrad（2009），Corchón and Serena（2018）らを参照されたい。

本稿では，こうしたChungとShafferらによる内生的賞金決定型コンテストにおける均衡の一意性を示したうえで，いくつかの比較静学分析を行う。コンテスト・ゲームにおける均衡の一意性に関しては，外生的賞金決定型コンテストにおいてはCornes and Hartley（2005）とYamazaki（2008），内生的賞金決定型コンテストに関してはHirai（2012）とHirai and Szidarovszky（2013）らにおいて一般的な条件下で示されている。他方，比較静学分析に関しては，外生的賞金決定型コンテストにおいてはNti（1997）とJensen（2016），内生的賞金決定型コンテストに関してはCorchón（2007）とDamianov *et al.*（2018）が先行研究として挙げられる。内生的賞金決定型コンテストを扱う本稿において，均衡の一意性についてはHirai and Szidarovszkyに準じて示されるものの，比較静学分析に関してはCorchónとDamianov *et al.*らの研究を拡張したものとなっている。それは，まずCorchónにおいてはプレイヤー間に対称性を仮定しているが，本研究においては，プレイヤー間の投資の効率性や予算，さらには賞金関数に関して非対称性を導入したうえで議論している。また，Damianov *et al.*においては，プレイヤー間の投資の効率性や賞金関数に関して非対称性を導入しているものの，コンテスト参加者数を２と限定している。本稿では，Damianov *et al.*と同様な非対称性を考慮しながら，プレイヤー数を$n(\geq 2)$と一般化したうえで比較静学分析をしている。コンテスト・ゲームにおける均衡の一意性や比較静学分析に際して，プレイヤー数の一般化や非対称性を導入したうえで考察することの重要性は，Dixit（1987）やCorchónで示唆されている。それは，賞金の外生性・内生性を問わず，一般にコンテスト・ゲームにおけるプレイヤーの戦略関係は，戦略的代替（strategic substitutes）でも戦略的補完（strategic complements）でもないことにある[2]。そのため，プレイヤー数やプレイヤー間の対称性・非対称性などの諸条件に依って，均衡数が変化し，比較静学分析に際して重要となる均衡における反応曲線の傾きも変化してしまうのである。こうした意味でも，内生的賞金決定型コンテストにおいて，CorchónとDamianov *et al.*らのモデルの一般化を図った本研究には一定の価値があるものと考

2　戦略的代替と補完に関して，詳しくはBulow *et al.*（1985）を参照されたい。

える。

本稿の構成は，次の通りである。第２節では，内生的な賞金決定型コンテストのモデルを提示する。第３節では，まず当該モデルに基づきナッシュ均衡の存在と一意性を示す。そのうえで，各プレイヤーの賞金関数を線形関数と特定化して，比較静学分析を試みる。第４節では，結論ならびに今後の課題について述べる。

２．モ　デ　ル

本稿においては，リスク中立的な $n(\geq 2)$ プレイヤーからなる，次のようなコンテスト・モデルを想定する。各プレイヤー $i(=1,\cdots,n)$ のコンテストへの投資水準を $x_i(\geq 0)$ とすると，コンテストの賞金を獲得できる確率ないしはシェアは，以下のタロック型のコンテスト成功関数（contest success function）によって定義されるものとする。

$$p_i = \frac{f_i(x_i)}{\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)} \tag{1}$$

Szidarovszky and Okuguchi（1997）は，$f_i(\cdot)$ をプレイヤー i のクジに関する生産関数（production function for lotteries）と呼んでいる。また，各プレイヤー i は予算 $\tilde{L}_i$ の制約下で投資水準を決定するものと仮定する（$x_i \leq \tilde{L}_i$）。なお，各プレイヤーのクジに関する生産関数ならびに予算は非対称であってもかまわない[3]。そのうえで，クジに関する生産関数に関して次の仮定をおく[4]。

仮定１． 生産関数 f_i は二回微分可能であり，$f_i(0)=0$ 且つ任意の $x_i \in [0, \tilde{L}_i]$ に関して $f_i'(x_i)>0$，$f_i''(x_i)<0$。

3　コンテスト成功関数（1）において，非対称的な生産関数を想定した場合の公理的な基礎は Clark and Riis（1998）で与えられている。

4　仮定1を満たし，先行研究において頻繁に用いられる具体的な生産関数としては，$f_i(x_i)=a_i x_i^r$ (*where* $r>0$，$a_i>0$) が挙げられる。

コンテスト生産関数（1）から明らかな通り，各プレイヤーの賞金獲得確率ないしはシェアに影響を及ぼすのは投資水準そのものではなく，関数$f_i(\cdot)$を通した水準である。そこで$y_i=f_i(x_i)$とおき，$y_i(\geq 0)$をプレイヤーiの努力水準（effort level）と呼ぶ。そして，1対1対応の関数$y_i=f_i(x_i)$については，逆関数$g_i(y_i)=f_i^{-1}(y_i)$をもつ。このとき，仮定1から，逆関数$g_i(\cdot)$に関して下記が成り立つ。

$$g_i(0)=0, and\ \ g_i'(y_i)>0, g_i''(y_i)>0\ \ for\ all\ y_i\in\left[0, f_i\left(\tilde{L}_i\right)\right] \qquad (2)$$

関数$g_i(\cdot)$は，各プレイヤーが努力水準y_iを発生させるための費用を表現している。

次に，コンテストの賞金に関しては，Chung（1996）とShaffer（2006）らと同じくコンテストに参加するすべてのプレイヤーの努力水準の合計$Y=\sum_{j=1}^{n}y_j$に依存するものとし，次の仮定を満たす賞金関数を想定する。

仮定２．賞金関数$R_i(Y)$は二回微分可能あり，$Y\in[0,\sum_{i=1}^{n}L_i]$に関して$R_i(Y)>0$且つ弱凹（weakly concave）である。但し，$L_i=f_i(\widetilde{L}_i)$である。

あとで見るように，仮定1と併せて仮定2は，各プレイヤーの（期待）利潤関数が自身の努力水準に関して強く凹関数（strictly concave function）になることを保証する。また，仮定2は各プレイヤーiの賞金の全体の努力水準に対する弾力性$\epsilon_i=YR_i'(Y)/R_i(Y)$が，$Y>0$に関して$\epsilon_i\leq 1$となることを含意している。

次項において，均衡の存在と一意性を示す際は，特に具体的な関数を定めることなく仮定2の性質を有する一般的な賞金関数を想定して議論を進める。その後，比較静学分析をする際は，分析の簡単化から仮定2を満たす次の線形の賞金関数を想定する。

$$R_i(Y)=\bar{R}_i+b_iY \qquad (3)$$

但し，$\bar{R}_i>0$はプレイヤーiの賞金の本源的価値を表すものとし，$b_i\gtreqless 0$は全体

の努力水準におかれるパラメータである。プレイヤー i にとって，$b_i>0$ であれば全体の努力水準が正の外部性として，$b_i<0$ であれば負の外部生として賞金に働くことを意味する[5]。

以上から，各プレイヤー i の（期待）利潤は

$$\pi_i(y_i, Y_{-i}) = R_i(Y)p_i - g_i(y_i) = R_i(y_i + Y_{-i})\frac{y_i}{y_i + Y_{-i}} - g_i(y_i) \tag{4}$$

となる。但し，$Y_{-i}=\sum_{j\neq i}^{n} y_j$。また，利潤(4)は少なくともある一人のプレイヤーが正の努力水準を選択した場合は成り立つものとして，誰もコンテストに参加しない，すなわち（$y_1,\cdots,y_n)=(0,\cdots,0$）のケースは $\pi_i(0,0)=0$ と仮定する。このとき，各プレイヤー i は $y_i\in[0,L_i]$ の制約のもと，自身の利潤(4)を最大にするように同時に努力水準 y_i を選択する。したがって，本稿のコンテスト・ゲームは同時手番ゲームであり，用いられる均衡概念は（純粋）ナッシュ均衡である。

３．均衡の存在と一意性，比較静学

本項では，前項の諸仮定のもとで，まずナッシュ均衡が一意に存在することを示す。そこで最初に $Y_{-i}>0$，すなわちプレイヤー i を除くすべてのプレイヤーの努力水準が正のケースを想定する。このとき，プレイヤー i の限界利潤は

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial y_i} = R_i'(y_i + Y_{-i})\frac{y_i}{y_i + Y_{-i}} + R_i(y_i + Y_{-i})\frac{Y_{-i}}{(y_i + Y_{-i})^2} - g_i'(y_i) \tag{5}$$

となる。さらに，仮定１と２のもとでは

5　線形の賞金関数（3）における b_i は，本源的価値 $\bar{R}_i$ で測った全体の努力水準 Y の価値，すなわち限界代替率 $\left(MRS_{Y\bar{R}_i} = \frac{\partial R_i/\partial Y}{\partial R_i/\partial \bar{R}_i}\right)$ と解釈することもできる（Corchón, 2007）。

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial y_i^2} = R_i''(y_i+Y_{-i})\frac{y_i}{y_i+Y_{-i}} - 2R_i(y_i+Y_{-i})\frac{Y_{-i}}{(y_i+Y_{-i})^3}(1-\epsilon_i) - g_i''(y_i) < 0 \quad (6)$$

が成り立つ。したがって，利潤 π_i は努力水準 y_i に関して強く凹関数となり，利潤最大化の二階条件は満たされるので，各プレイヤー i の最適反応関数 $\phi_i(Y_{-i})$ は次の通りとなる。

$$\phi_i(Y_{-i}) = \begin{cases} 0 \quad if \ \dfrac{R_i(Y_{-i})}{Y_{-i}} - g_i'(0) \leq 0 \\ L_i \quad if \ R_i'(L_i+Y_{-i})\dfrac{L_i}{L_i+Y_{-i}} + R_i(L_i+Y_{-i})\dfrac{Y_{-i}}{(L_i+Y_{-i})^2} - g_i'(L_i) \geq 0 \\ y_i^* \quad otherwise \end{cases} \quad (7)$$

但し，y_i^*は次の $y_i \in (0, L_i)$ に関する単調減少関数の一意な解である。

$$R_i'(y_i+Y_{-i})\frac{y_i}{y_i+Y_{-i}} + R_i(y_i+Y_{-i})\frac{Y_{-i}}{(y_i+Y_{-i})^2} - g_i'(y_i) = 0 \quad (8)$$

実際，仮定１と２より，上式の左辺は y_i の減少関数であり，$y_i=0$ のとき正となり，$y_i=L_i$ のときは負となるので，(8) 式は一意な解 $\phi_i(Y_{-i})$ をもつ。

次に，$Y_{-i}=0$ のケースを考える。まず $R_i' \leq 0$ のケースでは，プレイヤー i は可能な限り僅かな努力水準 $y_i>0$ を選択することで，正の利潤を獲得できる。よって，こうした状況下ではプレイヤー i の最適反応は存在しない。また，$R_i'>0$ のケースでは，プレイヤー i の利潤は (8) 式から有限且つ正の努力水準で最大化される。但し，その値が予算制約 L_i を超えるときは L_i が最適値となる。以上より，プレイヤーの戦略の組 $(y_1,\cdots,y_n)=(0,\cdots,0)$ というトリビアルなナッシュ均衡が生起することはない。したがって，以下においては $Y_{-i}>0$ のケースのみを想定する。

(7)式において，全体の努力水準 Y をあたかもパラメータのようにみなすと，個別の努力水準は Y の関数として表すことができる。したがって(7)式より，以下の関数を定義する。

$$\Phi_i(Y)=\begin{cases} 0 \quad if \quad \dfrac{R_i(Y)}{Y}-g_i'(0)\leq 0 \\ L_i \quad if \;\; R_i'(Y)\dfrac{L_i}{Y}+R_i(Y)\dfrac{Y-L_i}{Y^2}-g_i'(L_i)\geq 0 \\ y_i^{**} \quad otherwise \end{cases} \tag{9}$$

但し，y_i^{**}は区間（$0,L_i$）における

$$R_i'(Y)\frac{y_i}{Y}+R_i(Y)\frac{Y-y_i}{Y^2}-g_i'(y_i)=0 \tag{10}$$

の解である。(10)式左辺に関して，$y_i=0$ のときは正，$y_i=L_i$ のときは負となる。さらに，仮定１と２より

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left\{R_i'(Y)\frac{y_i}{Y}+R_i(Y)\frac{Y-y_i}{Y^2}-g_i'(y_i)\right\}=-\frac{R_i(Y)(1-\epsilon_i)}{Y^2}-g_i''(y_i)<0$$

となる。すなわち，(10)式左辺は y_i に関する減少関数であるので，(10)式は一意の解 $\Phi_i(Y)$ をもつ。当該解は，陰関数定理から $Y>0$ に関して連続微分可能な関数である。Wolfstetter（1999，p.91）に従い，本項では関数 $\Phi_i(\cdot)$ を包含的反応関数（inclusive reaction function）と呼ぶ（Selten, 1973; Szidarovszky and Yakowitz, 1977）。

そして，包含的反応関数を用いて，ナッシュ均衡は

$$\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(Y)-Y=0 \tag{11}$$

を満たす必要がある。ここで，(11)式左辺を $H(Y)$ とおくと，次の性質をもつ。まず，すべてのプレイヤー i に関して $\Phi_i(Y)$ は Y に関して連続なので，$H(Y)$ も連続である。また，$\Phi_i(Y)\geq 0$ なので $H(0)\geq 0$ であり，$\Phi_i(Y)\leq L_i$ なので $H(\sum_{i=1}^{n}L_i)\leq 0$ である。したがって，(11)式は少なくとも一つの解 Y をもつ。さらに，すべてのプレイヤー i に関して $\Phi_i'(Y)<0$ であれば，$H'(Y)<0$ となり一意性が示される。そこで，(10)式に関して $y_i=\Phi_i(Y)$ をふまえて Y に関

して微分すると，

$$R_i''\frac{y_i}{Y}+R_i'\frac{\Phi_i'Y-y_i}{Y^2}+\frac{R_i'Y-R_i}{Y^2}\left(1-\frac{y_i}{Y}\right)-\frac{R_i(\Phi_i'Y-y_i)}{Y^3}-g_i''\Phi_i'=0$$

となり

$$\Phi_i'(Y)=\frac{y_iYR_i''-R_i(1-\epsilon_i)\left(1-\frac{2y_i}{Y}\right)}{R_i(1-\epsilon_i)+g_i''Y^2}$$

を得る。仮定１と２から，上式の分母は正であるが，分子の符号は定まらない。したがって，$\Phi_i'(Y)$ は単調減少とは限らない[6]。

そこで，(10)式の左辺に関して，次のように変形してみる。

$$h_i(Y,s_i)=R_i'(Y)s_i+\frac{R_i(Y)}{Y}(1-s_i)-g_i'(s_iY) \tag{12}$$

但し，$s_i=y_i/\mathrm{Y}$ である。関数 h_i は，プレイヤー i の限界利潤を全体の努力水準とシェアで表現したものである。仮定１と２，ならびに $s_i \leq 1$ より

$$\frac{\partial h_i}{\partial Y}=R_i''(Y)s_i-\frac{R_i(Y)}{Y^2}(1-\epsilon_i)(1-s_i)-g_i''(s_iY)s_i<0$$

且つ

$$\frac{\partial h_i}{\partial s_i}=-\frac{R_i(Y)}{Y}(1-\epsilon_i)-g_i''(s_iY)Y<0$$

である。ここで，Cornes and Hartly（2005）によるシェア関数（share function）$S_i(Y)=\Phi_i(Y)/Y$ を定義する。包含的反応関数(9)と(12)式より，以下を得る。

6　なお，対称均衡を仮定して，且つ，$n>2$ *and* $R_i''\leq 0$ もしくは $n\geq 2$ *and* $R_i''<0$ が成立すれば，包含的反応関数の傾きは負となる。

$$S_i(Y)=\begin{cases} 0 \quad if \;\; h_i(Y,0)\le 0 \\ 1 \quad if \;\; Y\le L_i \; and \; h_i(Y,1)\ge 0 \\ \dfrac{L_i}{Y} \quad if \;\; Y>L_i \;\; and \; h_i\left(Y,\dfrac{L_i}{Y}\right)\ge 0 \\ s_i^* \quad otherwise \end{cases} \tag{13}$$

但し，s_i^*は次式

$$R_i'(Y)s_i+\frac{R_i(Y)}{Y}(1-s_i)-g_i'(s_iY)=0 \tag{14}$$

において，もし $Y\le L_i$ であれば区間（0,1），もし $Y>L_i$ であれば区間（$0,L_i/Y$）における解である。まず，(13)において $S_i(Y)=0$ が成立するならば $h_i(Y,s_i)$ の単調性から，その他のケースは生起せず，$S_i(Y)=1$，L_i/Y，s_i^*のいずれかのケースであれば $S_i(Y)=0$ とはならない。よって，$Y>0$ に関して(13)式はいずれか一つの状況のみ生起する。次に，(14)式左辺は $s_i=0$ において正，$s_i=1$（*for* $Y\le L_i$）もしくは $s_i=L_i/Y$（*for* $Y>L_i$）のときは負，s_i に関して減少関数である。したがって，(14)式から陰関数定理による $Y>0$ に関して連続微分可能な一意な解 s_i^*が存在する。

　さらに(14)式に関して $s_i=S_i(Y)$ をふまえて Y に関して微分すると

$$R_i''s_i+R_i'S_i'+\frac{R_i'Y-R_i}{Y^2}(1-s_i)-\frac{R_i}{Y}S_i'-g_i''(s_iY)(S_i'Y+s_i)=0$$

を得る。上式を S_i' に関して解くと

$$S_i'(Y)=-\frac{(g_i''-R_i'')s_iY+\dfrac{R_i(1-s_i)}{Y}(1-\epsilon_i)}{R_i(1-\epsilon_i)+g_i''Y^2}<0$$

となる。上式の符号は，仮定１と２から成立する。したがって，シェア関数 $S_i(Y)$ は Y に関して一定もしくは減少となる連続な関数である。

　このとき，ナッシュ均衡の条件(11)式をシェア関数を用いて変形すると

$$\sum_{i=1}^{n}S_i(Y)-1=0 \tag{15}$$

となる。(15)式左辺は非増加関数である。いま，(15)式において二つの異なる解 $\bar{Y} < \bar{Y}'$ が存在すると仮定する。このとき，$\bar{Y}' > 0$ 且つ少なくとも一人のプレイヤー i に関して $S_i(\bar{Y}') > 0$ である。このケースにおいては，$S_i(\bar{Y}) = S_i(\bar{Y}') = 1$ もしくは $S_i(\bar{Y}) > S_i(\bar{Y}')$ であり，且つ，$S_j(\bar{Y}) \geq S_j(\bar{Y}')$（*for all* $j \neq i$）となる。そして前者のケース $S_i(\bar{Y}) = S_i(\bar{Y}') = 1$ に関しては，$Y_{-i} = 0$ に関してプレイヤー i の利潤が二つの異なる全体の努力水準で最大化することを意味する。前述したように，すべてのプレイヤー i の利潤は強く凸なので，こうした状況は矛盾する。次に後者のケース $S_i(\bar{Y}) > S_i(\bar{Y}')$ については，次式

$$\sum_{i=1}^{n} S_i(\bar{Y}) > \sum_{i=1}^{n} S_i(\bar{Y}')$$

が成立してしまい，明らかに矛盾する。したがって，ナッシュ均衡における全体の努力水準は一意に存在する。

そして，均衡における全体の努力水準を $\bar{Y}$ とおくと，それに対応するプレイヤーの戦略の組（$\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n$）が，各プレイヤーのシェア関数（$\bar{y}_i = \bar{Y} S_i(\bar{Y})$）もしくは包含的反応関数（$\bar{y}_i = \Phi_i(\bar{Y})$）から求まる。

以上の結果を，次の命題１としてまとめる。

命題１．（Hirai and Szidarovszky, 2013）仮定１と２のもとで，非対称的な内生的賞金決定型コンテストにおいては一意なナッシュ均衡が存在する。

次に，内生的に決まる賞金の変化が，全体の努力水準や各プレイヤーの努力水準にどのような変化を及ぼすかという比較静学分析を行う。そこで，以下においては内点解を仮定し，且つ，各プレイヤー i の賞金関数に関して仮定２を満たす(3)式の線形な賞金関数を想定する。

(14)式に関して，賞金関数(3)を想定すると

$$b_i s_i + \frac{(\bar{R}_i + b_i Y)}{Y}(1 - s_i) - g_i'(s_i Y) = 0 \qquad (14)'$$

となる。(14)′ 式を b_i と Y に関して全微分すると

$$db_i + \left\{-\frac{(1-s_i)\bar{R}_i}{Y^2} - g_i''s_i\right\}dY = 0$$

となるので，

$$\frac{dY}{db_i} = \frac{1}{\dfrac{(1-s_i)\bar{R}_i}{Y^2} + g_i''s_i} > 0$$

を得る。同様に，(14)′ 式を $\bar{R}_i$ と Y に関して全微分すると

$$\frac{(1-s_i)}{Y}d\bar{R}_i + \left\{-\frac{(1-s_i)\bar{R}_i}{Y^2} - g_i''s_i\right\}dY = 0$$

となるので，

$$\frac{dY}{d\bar{R}_i} = \frac{(1-s_i)Y}{(1-s_i)\bar{R}_i + g_i''s_iY^2} > 0$$

を得る。上式らの符号は仮定 1 と $s_i \in (0,1)$ より明らかである。以上より，次の命題 2 が示された。

命題２． 仮定 1 と線形の賞金関数(3)のもとで，ナッシュ均衡における全体の努力水準は $\bar{R}_i$ と b_i に関して強く増加する。

命題 2 より，プレイヤー i の賞金の本源的価値 $\bar{R}_i$ の上昇と，全体の努力水準がプレイヤー i の内生的な賞金に及ぼす正の外部性 b_i が高まるにつれて，全体の努力水準 Y は増加することが示された。なお，命題 2 はプレイヤー間の生産関数や線形の賞金関数に対称性を仮定した Corchón (2007) による結果の一般化となっている。

それでは，そうした全体の努力水準 Y の増加が個別のプレイヤー i の努力水準 y_i に，いなかなる影響を及ぼすのか考える。そのために，(10)式左辺を

$\Psi_i(y_i, Y)$ とおいて，y_i と Y に関して全微分すると

$$D_{y_i}\Psi_i(y_i, Y)dy_i + D_Y\Psi_i(y_i, Y)dY = 0 \to \frac{dy_i}{dY} = -\frac{D_Y\Psi_i(y_i, Y)}{D_{y_i}\Psi_i(y_i, Y)} \tag{16}$$

を得る。このとき，(16)式の分母は(10)式より

$$D_{y_i}\Psi_i(y_i, Y) = -\frac{R_i(Y)}{Y^2}(1-\epsilon_i) - g_i''(y_i) < 0 \tag{17}$$

となる。(17)式の符号は仮定１と，線形の賞金関数(3)に限定せずとも仮定２を満たす一般的な賞金関数 $R_i(Y)$ のもとで成立することは明らかである[7]。また(16)式分子に関しては，(10)式左辺を Y に関して微分すると次の関係を得る。

$$\begin{aligned} D_Y\Psi_i(y_i, Y) &= R_i''\frac{y_i}{Y} - R_i'\frac{y_i}{Y^2} + R_i'\frac{Y - y_i}{Y^2} + R_i\frac{2y_i - Y}{Y^3} \\ &\propto y_i(R_i''Y^2 - 2R_i'Y + 2R_i) + R_i'Y^2 - R_iY \end{aligned}$$

さらに，ここで線形な賞金関数(3)を想定すれば $R_i''=0$ となるので，

$$D_Y\Psi_i(y_i, Y) \propto 2y_iR_i(1-\epsilon_i) - YR_i(1-\epsilon_i) \tag{18}$$

となる。(18)より，

$$\begin{aligned} &D_Y\Psi_i(y_i, Y) \geq 0 \;\; iff \;\; y_i/Y \geq 1/2 \\ &D_Y\Psi_i(y_i, Y) < 0 \;\; iff \;\; y_i/Y < 1/2 \end{aligned} \tag{19}$$

が得られる。

以上，(16)，(17)と(19)より次の命題３が示された。

7　Acemoglu and Jensen（2013）と Jensen（2016）は，各プレイヤー i の限界利潤 $\Psi_i(y_i, Y)$ が $\Psi_i(y_i, Y) = 0$ のとき $D_{y_i}\Psi_i(y_i, Y) < 0$ となる条件を，一様な局所可解条件（uniform local solvability）と呼んでいる。

命題３．仮定１と線形な賞金関数(3)のもと，均衡において

$$\frac{y_i}{Y} \geq \frac{1}{2} \tag{20}$$

が成立するプレイヤー i の努力水準 y_i は，全体の努力水準 Y の上昇に伴い増加する。逆に，

$$\frac{y_i}{Y} < \frac{1}{2} \tag{21}$$

が成立するプレイヤー i の努力水準 y_i は，全体の努力水準 Y の上昇に伴い低下する。

均衡において(20)が成立することは，コンテスト成功関数(1)の定義から50％以上の確率で賞金を獲得できる，ないしは賞金の半分以上のシェアを得られることを意味している。その意味で，Dixit（1987）はそうしたプレイヤーをコンテストにおける本命（favorite）と呼び，逆に(21)が成立するプレイヤーを伏兵（underdog）と呼んでいる。そこで，そうした呼称を利用すると命題３は次のことを示している。命題２で示されたような要因でコンテストにおける全体の努力水準が上昇すると，本命はその優位性を維持するために努力水準を増加させるが，伏兵はそれを低下させる。なお，命題３と同様の結果は，Damianov *et al.*（2018）によりプレイヤー数を２人に限定した非対称的な内生的賞金決定型コンテストにおいても示されている。また，Jensen（2016）による $n(\geq 2)$ プレイヤーからなる非対称的な外生的賞金決定型コンテストにおいても，命題３と同様な結果が導出されている。したがって，本稿の命題３からコンテスト・ゲームにおいて全体の努力水準の上昇が，個々のプレイヤーの努力水準にいかなる影響を定性的に及ぼすのかに関しては，プレイヤー数や賞金の外生性・内生性に依らず，均衡におけるコンテスト参加者の優位性（本命か伏兵）に依存するということが示された。

４．おわりに

本稿においては，コンテストの賞金がプレイヤーの努力水準に依存して決まる内生的賞金型決定コンテスト・ゲームにおける均衡の存在と一意性，比較静学分析を試みた。特に，本研究における比較静学分析は Corchón（2007）と Damianov *et al.*（2018）らの既存研究を，プレイヤー間の生産関数や賞金関数の非対称性の導入やプレイヤー数を一般化したものである。その結果，内生的賞金決定型コンテストにおいて，プレイヤー数やプレイヤー間の対称性・非対称性に依らず，次の二つが成り立つことが示された。一つは，均衡におけるコンテスト参加者全体の努力水準は，各プレイヤーの賞金の本源的価値や全体の努力水準が賞金に及ぼす正の外部性が高まるにつれて増加する。二つに，そうした全体の努力水準の上昇が一人ひとりのプレイヤーの努力水準に及ぼす影響は，均衡におけるプレイヤーの賞金獲得確率ないしはシェアの優位性に依存することが示された。具体的には，均衡において50％以上の確率ないしはシェアで賞金を獲得できる見込みがある本命（favorite）なプレイヤーは，全体の努力水準が上昇すると，コンテストにおける優位性を保持するために，個別の努力水準を増加させる。他方，均衡において賞金獲得確率ないしはシェアが50％未満の伏兵（underdog）なプレイヤーは，全体の努力水準の上昇によって個別の努力水準の低下に結びつくことが示された。

最後に，本稿の分析の課題として，次の２つを挙げておく。第一に，本稿で示された比較静学分析の結果は，線形な賞金関数に依拠していることである[8]。したがって，残された課題としては，より一般的な賞金関数のもとでも本稿と同様な比較静学分析の結果が得られるのか否かを確認することである。

第二に，内生的賞金決定型コンテストにおいては，プレイヤー数を一定とした短期の議論のみならず，プレイヤー数が内生的に決まる長期の分析をすることは興味深いことである。一般に，コンテスト・ゲームにおいて長期の分析を試みた既存研究は Chung（1996）を除いて見当たらない。その理由は，特にコ

8　線形な賞金関数の想定は，Corchón（2007）と Damianov *et al.*（2018）（の一部）の研究でも同様である。

ンテストにおける賞金が外生的に与えられるケースでは，Tullock（1980）によるレントシーキング・ゲームをはじめプレイヤーの投資・努力水準は社会的な浪費を示すものである。そして分析の主眼は，プレイヤーが非協力的な環境下で，どれだけレントを消失させるレントシーキング活動をしてしまうか，またそうした（社会的に無駄な）活動を抑制させるためには，どのような仕組みが必要かというものになる。したがって，外生的賞金決定型コンテストにおいては，長期的な参入プレイヤー数はどうなるか，またそのときのプレイヤー数や努力水準は社会厚生（コンテスト・ゲームにおいてはプレイヤーの結合利潤）の観点から望ましいのかという問題設定はナンセンスなものである。他方，コンテストの賞金がプレイヤーの努力水準に依存する内生的賞金決定型コンテストにおいては，長期におけるプレイヤー数の内生化や，そのときの努力水準が社会厚生の観点から過剰・過少なのかを考察することは重要であり，今後の課題としていきたい。

参考文献

Acemoglu, D. and M. K. Jensen (2013), "Aggregate comparative statics," *Games and Economic Behavior* 81, 27–49.

Bell, D. E., R. L. Keeney, and J. D. C. Little (1975), "A market share theorem," *Journal of Marketing Research* 12, 136–141.

Bulow, J. I., J. D. Geanakoplos, and P. D. Klemperer (1985), "Multimarket oligopoly: Strategic substitutes and complements," *Journal of Political Economy* 93, 488–511.

Chung, T-Y. (1996), "Rent-seeking contest when the prize increases with aggregate efforts," *Public Choice* 87, 55–66.

Clark, D. J. and C. Riis (1998), "Contest success functions: An extension," *Economic Theory* 11, 201–204.

Corchón, L. C. (2007), "The theory of contests: A survey," *Review of Economic Design* 11, 69–100.

Corchón, L. C. and M. Serena (2018), "Contest theory," in L. C. Corchón and M. A. Marini (eds.), *Handbook of Game Theory and Industrial Organization*, vol. 2, Edward Elgar Publishing, 125–146.

Cornes, R. and R. Hartley (2005), "Asymmetric contests with general technologies," *Economic Theory* 26, 923–946.

Damianov, D. S., S. Sanders and A. Yildizparlak (2018), "Asymmetric endogenous prize contests," *Theory and Decision* 85, 435–453.

Dixit, A. (1987), "Strategic behavior in contests," *American Economic Review* 77, 891–898.

Dubey, P., A. Mas-Colell and M. Shubik (1980), "Efficiency properties of strategic market

games," *Journal of Economic Theory* 22, 339–362.
Friedman, J. W. (1983), "Advertising and oligopolistic equilibrium," *Bell Journal of Economics* 14, 464–473.
Friedman, L. (1958), "Game-theory model in the allocation of advertising expenditures," *Operations Research* 6, 699–709.
Hirai, S. (2012), "Existence and uniqueness of pure Nash equilibrium in asymmetric contests with endogenous prizes," *Economics Bulletin* 32, 2744–2751.
Hirai, S. and F. Szidarovszky (2013), "Existence and uniqueness of equilibrium in asymmetric contests with endogenous prizes," *International Game Theory Review* 15, 1–9.
Jensen, M. K. (2018), "Existence, uniqueness, and comparative statics in contests," in P. von Mouche and F. Quartieri (eds.), *Equilibrium Theory for Cournot Oligopolies and Related Games: Essays in Honour of Koji Okuguchi*, Springer, 233–244.
Konrad, K. A. (2009), *Strategy and Dynamic in Contests*, Oxford University Press.
Loury, G. C. (1979), "Market structure and innovation," *Quarterly Journal of Economics* 93, 395–410.
Nti, K. O. (1997), "Comparative statics of contests and rent-seeking games," *International Economic Review* 38, 43–59.
Selten, R. (1973), "A simple model of imperfect competition where four are few and six are many," *International Journal of Games Theory* 18, 452–458.
Shaffer, S. (2006), "War, labor tournaments, and contest payoffs," *Economics Letters* 92, 250–255.
Szidarovszky, F. and K. Okuguchi (1997), "On the existence and uniqueness of pure Nash equilibrium in rent-seeking games," *Games and Economic Behavior* 18, 135–140.
Szidarovszky, F. and S. Yakowitz (1977), "A new proof of the existence and uniqueness of the Cournot equilibrium," *International Economic Review* 18, 787–789.
Tullock, G. (1980), "Efficient rent-seeking," in J. M. Buchanan, R. D. Tollison and G. Tullock (eds.), *Toward a Theory of the Rent-Seeking Society*, Texas A&M University Press, pp.97–112.
Wolfstetter, E. (1999), *Topics in Microeconomics: Industrial Organization, Auctions, and Incentives*, Cambridge University Press.
Yamazaki, T. (2008), "On the existence and uniqueness of pure-strategy Nash equilibrium in asymmetric rent-seeking contests," *Journal of Public Economic Theory* 10, 317–327.