

第2種一般化ベータ分布の 日本の所得分配への適用

吉 岡 慎 一

はじめに

1. 第2種一般化ベータ (GB2) 分布
2. 母数の推定結果
3. 不平等度の推定結果

おわりに 参考文献

補論：不平等測度の母数表示

はじめに

19世紀末のパレート分布以降、所得の規模分布の統計モデルは多数提案されていて、例えば Kleiber=Kotz (2003) において、経済分野に限定しても50種類以上の分布モデルが検討されている¹⁾。その中で、関数型が単純であり母数の数が少なく、その経済的解釈が容易なために、パレート分布と対数正規分布とが頻繁に利用されているが、前者は所得分配の上部の裾にしか当てはまらず²⁾、後者は分布の両端の裾への当てはまりが相対的に良くないことはよく知られている。そこで、Champernowne (1952) は所得の密度関数を確率過程の結果と解釈し母数を4つもつ分布モデルを提案した³⁾。このモデルは上部の裾

1) 分布モデルの展望については、例えば Dagum (1990) も参照。

2) 我が国の所得データへの一般化パレート分布の適用が、吉岡 (2010) で試みられているが、この状況は変わらない。

3) Champernowne 分布は5-母数モデルといわれることがあるが、第5母数は標本数を表わすので、実質的に4-母数モデルである。

にパレート分布を用い、それ以外の母集団もうまく記述することができるものだが、その融通性が高まる分、母数の数が多くなりその推定とその経済的意味付けとが困難になっていた。そして、1960年代以降コンピュータの利用が一般的になるにつれて Champernowne 分布の特別の場合であり比較的当てはまりの良い Log-logistic 分布⁴⁾、観察される分布の安定性や規則性を捉えるための微分方程式から導出される Singh-Maddala (1976) 分布および Dagum (1977) 分布などが提案・利用され、さらにこの3つを統合するモデルとして、4-母数の第2種一般化ベータ (GB2) 分布が McDonald (1984) によって提示され、US 家族所得データに関して GB2のほうが4-母数の第1種一般化ベータ (GB1) よりも適合度が高いことが報告されている⁵⁾。さらに、McDonald=Xu (1995) は GB2と GB1とを特別の場合に含む5-母数の一般化ベータ (GB) を提示しているが、彼らによると、US 家族所得に関する GB の特別の場合と GB2の母数の推定結果は同一であり GB1の推定結果よりも適合度が高い。

一般的に母数の数が多くなればなるほど適合性がよくなるが、その母数の解釈が曖昧になるから、4-母数程度の分布モデルが実用上適切と思われるので⁶⁾、本稿では我が国の所得分布に GB2が適用される⁷⁾。したがって、ここでの目的は、今日までに我が国で行われた分布モデル間の適合度などの比較研究⁸⁾ではなく、特定のモデルを採用した場合、その母数で表わされる相対的不平等測度 (ジニ係数、Theil 測度、変動係数) および絶対的不平等測度 (分散) の時系列変動 (1975-2005) が従来までに解明されたノンパラメトリックな不平等測度の変動と大筋で一致していることを明らかにすることである。また、GB2の4-母数の推定には最尤法が利用され、その際の最適化には4種類の手法 (Nelder-Mead, Newton-Raphson, BFGS, SANN) が採用され、その推定結果の比較が試みられる。

4) この分布は、Fisk (1961) 分布とも呼ばれる。

5) GB2は一般化 Gamma (Stacy, 1962) 分布も含んでおり、GB1は後者の分布とパレート分布も含んでいる。

6) 母数3以上の分布モデルならローレンツ曲線の交叉を認めるモデルになる。

7) 3-母数ベータ分布の所得分配への適用例に、Thurow (1970) がある。

8) Atoda et al.(1988), 駿河 (1982)。

1. 第2種一般化ベータ (GB2) 分布

確率変数 X の値を $x \geq 0$ とするとき、GB2分布の密度関数はベータ関数 B を用いて次のように定義される。

$$f(x) = \frac{ax^{ap-1}}{b^{ap}B(p, q)[1+(x/b)^a]^{p+q}}, \quad a > 0, b > 0, p > 0, q > 0.$$

$$B(p, q) = \int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{q-1} dz.$$

b は尺度母数であり、他はすべて形状母数である。

$a = 1$ のとき3-母数の第2種ベータ分布、 $p = 1$ のとき3-母数 Singh-Maddala 分布、 $q = 1$ のとき3-母数 Dagum 分布に各々なる。また、GB2の k 次のモーメントは次のように表わされる。

$$E(X^k) = \frac{b^k B(p+k/a, q-k/a)}{B(p, q)}, \quad -ap < k < aq.$$

2. 母数の推定結果

所得分配に関して分析に十分な量の個票データを入手することは困難な場合が往々にしてあり、たいてい集計データしか公表されないことが通常である。そのような場合にデータの補間や補外ができる⁹⁾分布モデルが利用される。特に、所得分配のデータにおいては、分配の梯子ないしスケール上の目盛りの最下部や最上部は打切りになっており、さらに所得区間の平均値のような代表値が不明なおおしい。そこで、所得分配を連続分布とみなすと分布モデルの利用価値が高まるのである。つまり、分布モデルを採用すると少数の母数で所得分配を記述することができ、モデルによってはいくつかの不平等測度やいわゆるローレンツ曲線が母数だけで表現されることがある。

さて、我が国における所得分配の不平等性の時系列変動は、『国民生活基礎

9) Nygård = Sandström (1981).

表2-1 GB2母数の推定値等：2005年

母数	推定値	Nelder-Mead 法		p 値
		標準誤差	t 値	
a	0.8173	0.0133	61.563	2.20E-16
b	2501.31	NaN	NaN	NaN
p	3.3355	0.0561	59.472	2.20E-16
q	12.903	NaN	NaN	NaN
BFGS 法				
a	1.5484	0.1111	13.940	2.20E-16
b	808.31	19.151	42.208	2.20E-16
p	1.2625	0.1538	8.2078	2.25E-16
q	2.7179	0.2648	10.266	2.20E-16
Newton-Raphson 法				
a	1.6144	0.0971	16.633	2.20E-16
b	736.15	0.3905	1885.37	2.20E-16
p	1.2161	0.1225	9.9235	2.20E-16
q	2.3768	0.1884	12.613	2.20E-16
SANN 法 (確率焼鈍し法)				
a	0.8920	0.0080	111.55	2.20E-16
b	476.46	NaN	NaN	NaN
p	4.0392	0.0321	125.76	2.20E-16
q	4.4574	0.0080	557.44	2.20E-16

(資料) 厚生労働省『国民生活基礎調査』各年版の度数分布により計測。

(注) NaN : Not a Number

調査』(厚生労働省)の17から25所得階級データ¹⁰⁾を利用して1970年代中期から2005年頃までについて、吉岡(2007, 2008, 2010)において明らかにされているので、ここでも同じデータが利用される。表2-1から表2-4は、総世帯所得の度数分布に関するGB2分布の母数の最尤法による推定結果である。最尤法を適用する際の最適化には4種類の方法(Nelder-Mead, Newton-Raphson, BFGS, SANN)が採用され、その推定結果の比較が行われている¹¹⁾。Newton-Raphson法は2階微分可能な関数の場合に適用され、Nelder-Mead法は微分不

10) 我が国の所得分配に関する統計資料の概要とその問題点は、青木(1979)、橋木・八木(1994)、吉岡(1995)などを参照。

11) 最適化の計算にはR言語のoptim関数が利用されている。R言語では無限大を扱うことができ、それを定数Infで表わすとき、NaN=Inf/Infである。また数値最適化に関する解説については、例えばFletcher(1987)、Nocedal=Wright(1999)などを参照。

表2-2 GB2母数の推定値等：1995年

母数	推定値	Nelder-Mead 法		
		標準誤差	t 値	p 値
a	1.0249	0.0248	41.332	2.20E-16
b	6868.28	0.3837	17899.2	2.20E-16
p	2.0171	0.0990	20.373	2.20E-16
q	23.612	0.0874	270.14	2.20E-16
BFGS 法				
a	1.8272	0.1411	12.948	2.20E-16
b	1173.90	106.53	11.019	2.20E-16
p	0.9352	0.0988	9.4685	2.20E-16
q	2.9540	0.5071	5.8253	5.70E-09
Newton-Raphson 法				
a	2.1388	0.0189	113.38	2.20E-16
b	1014.34	NaN	NaN	NaN
p	0.7666	0.0111	69.135	2.20E-16
q	2.1530	0.0160	134.27	2.20E-16
SANN 法 (確率焼鈍し法)				
a	1.5656	0.1102	14.209	2.20E-16
b	527.48	0.3846	1371.66	2.20E-16
p	1.6274	0.1830	8.8917	2.20E-16
q	1.7705	0.1928	9.1825	2.20E-16

(資料) 表2-1に同じ。

(注) 表2-1に同じ。

可能な関数でも関数値だけで計算され頑健である。Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) 法は関数値と勾配関数を最適化関数の曲面の近似に用いる。Simulated-annealing (SANN) 法は微分不可能な関数でも関数値だけを用い、局所探索をランダムに行うから、局所解が多数存在する場合に有効だが一般的な手法ではない。したがって、SANN 法は参考のために採用された。最適化の数値計算は初期値におおきく依存するが、ここでは各年および各手法に共通に $a=2.0$, $b=\text{sample median}$, $p=1.0$, $q=1.0$ と置いた。対数尤度 (表2-5) から判定して推定結果が良好な方から並べると、Nelder-Mead, BFGS, Newton-Raphson, 最後に予想通り SANN となる¹²⁾。

図2-1はBFGS法によって推定されたGB2モデルの母数を利用して描か

12) ここで採用された各年に限るかもしれないが、仮説の検定の点から前3者から選択するなら、標準誤差などがすべて得られているBFGS法が望ましい。

表2-3 GB2母数の推定値等：1985年

母数	推定値	Nelder-Mead 法		
		標準誤差	t 値	p 値
a	1.9200	0.1553	12.362	2.20E-16
b	731.11	0.3963	1844.78	2.20E-16
p	1.0498	0.1422	7.3809	1.57E-13
q	2.5454	0.2463	10.335	2.20E-16
BFGS 法				
a	2.0895	0.1216	17.183	2.20E-16
b	680.82	14.276	47.688	2.20E-16
p	0.9423	0.0846	11.140	2.20E-16
q	2.1338	0.1805	11.822	2.20E-16
Newton-Raphson 法				
a	2.3674	0.0190	124.38	2.20E-16
b	632.12	NaN	NaN	NaN
p	0.8012	0.0000	-∞	2.20E-16
q	1.6915	0.0181	93.652	2.20E-16
SANN 法 (確率焼鈍し法)				
a	2.0476	0.0127	161.14	2.20E-16
b	427.11	0.0429	9962.56	2.20E-16
p	1.2203	0.0095	129.09	2.20E-16
q	1.4117	0.0212	66.679	2.20E-16

(資料) 表2-1に同じ。

(注) 表2-1に同じ。

れた密度関数の比較である。1975年の所得の分布形とそれ以降の分布形が著しく異なっているのは、尖度の違いもあるが、データの公表時期によって所得階級数が異なることの影響がおおきい。つまり、1975所得年の階級数が17にたいし1982所得年以降の階級数は今日まで一貫して25である。密度関数の横軸の所得の目盛り(単位：万円)は相対化されていないから、密度関数の時系列比較の際には注意を要する。

3. 不平等度の推定結果

表3-1は推定されたGB2分布モデルの母数による所得不平等度の計算結果である¹³⁾。集計データとしての標本から直接計算された不平等度のノンパラメトリック推定値は、集計グループ内では不平等度はゼロと仮定されているか

表2-4 GB2母数の推定値等：1975年

母数	推定値	Nelder-Mead 法		
		標準誤差	t 値	p 値
a	1.1744	0.0177	66.410	2.20E-16
b	619.71	NaN	NaN	NaN
p	2.2712	0.0354	64.218	2.20E-16
q	6.8812	0.0549	125.24	2.20E-16
BFGS 法				
a	1.6843	0.1464	11.508	2.20E-16
b	372.52	28.402	13.116	2.20E-16
p	1.3744	0.1767	7.7775	7.40E-15
q	2.8989	0.5027	5.7672	8.06E-09
Newton-Raphson 法				
a	1.5731	0.0192	81.754	2.20E-16
b	418.90	NaN	NaN	NaN
p	1.4776	0.0271	54.519	2.20E-16
q	3.5129	0.0178	197.38	2.20E-16
SANN 法 (確率焼鈍し法)				
a	1.7809	0.0477	37.362	2.20E-16
b	220.47	0.4320	510.35	2.20E-16
p	1.6244	0.0527	30.846	2.20E-16
q	1.7292	0.0727	23.778	2.20E-16

(資料) 表2-1に同じ。

(注) 表2-1に同じ。

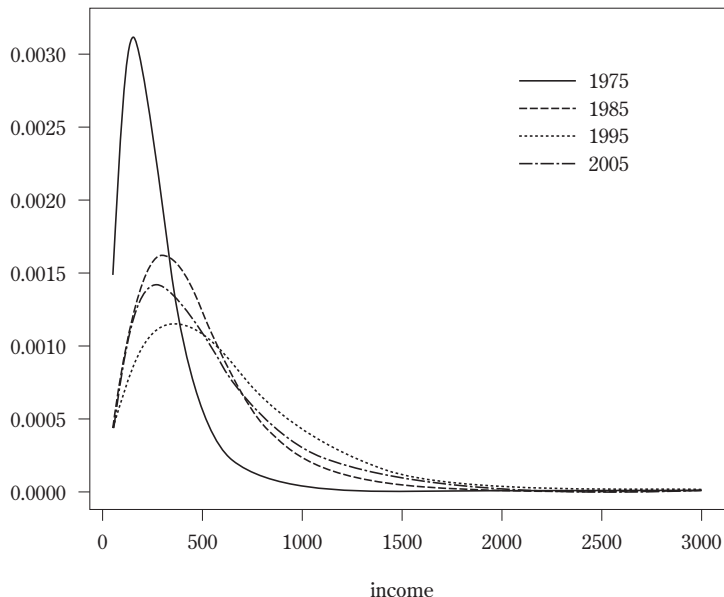
表2-5 最適化手法別の対数尤度

2005年		1985年	
	対数尤度		対数尤度
Nelder-Mead 法	-45068.5	Nelder-Mead 法	-70433.0
BFGS 法	-45087.7	BFGS 法	-70433.6
Newton-Raphson 法	-45095.6	Newton-Raphson 法	-70436.1
SANN 法	-45157.4	SANN 法	-70563.3
1995年		1975年	
	対数尤度		対数尤度
Nelder-Mead 法	-58833.3	Nelder-Mead 法	-51291.4
BFGS 法	-58845.1	BFGS 法	-51300.0
Newton-Raphson 法	-58851.2	Newton-Raphson 法	-51296.4
SANN 法	-59053.4	SANN 法	-51391.0

(資料) 表2-1に同じ。

13) 特に、ジニ係数と Theil 測度の母数表示は補論を参照。また、本稿で用いられた不平等測度の定義式およびその性質については、Chakravarty (1990), Jenkins (1991), Cowell (1995)などを参照。

図2-1 GB2密度関数の比較
GB2 distributions



(資料) 表2-1, 表2-2, 表2-3及び表2-4における推定母数 (BFGS法) により作成。

ら不平等度の下限近辺を与えていると考えられ、比較のためのものであり、実際ほとんどの推定でこの標本推定値は、パラメトリック推定値よりも小さな値を示している。SANN法以外の3つの最適化手法は、どの不平等測度についても標本推定値に近似した結果をもたらしているが、重要なのは不平等測度の変動の方向である。相対的不平等度としてのジニ係数、Theil測度および変動係数の標本推定値は1970年代中期から2005年頃まで上昇しており、4つの最適化手法によるほとんどの相対的不平等度の推定値が同じ変動傾向を示している(図3-1, 図3-2)¹⁴⁾。特に、Nelder-Mead法およびNewton-Raphson法による推定値は標本推定値の時系列変動と同一である。絶対的不平等度としての

14) 相対不平等測度の代表としてのジニ係数の推移が示されている。

表3-1 不平等度の推定結果

ジニ係数	Nelder-Mead 法	Newton-Raphson 法	BFGS 法	SANN 法	nonparametric
2005年	0.4009	0.4087	0.4055	0.4366	0.3967
1995年	0.3819	0.3797	0.3815	0.4337	0.3798
1985年	0.3613	0.3622	0.3617	0.3933	0.3616
1975年	0.3609	0.3604	0.3616	0.3877	0.3566
Theil 測度					
2005年	0.2699	0.5569	0.2834	0.3420	0.2608
1995年	0.2395	0.2435	0.2438	0.3541	0.2388
1985年	0.2197	0.2245	0.2216	0.2858	0.2216
1975年	0.2162	0.2177	0.2208	0.2742	0.2104
変動係数					
2005年	0.8127	1.5582	0.8651	1.0285	0.7731
1995年	0.7325	0.7626	0.7561	1.1698	0.7284
1985年	0.7243	0.7491	0.7339	0.9917	0.7243
1975年	0.7112	0.7211	0.7347	0.9422	0.6862
物価調整済分散					
2005年	20.28	88.46	24.19	36.64	18.93
1995年	21.61	23.43	23.26	61.74	21.39
1985年	15.65	16.83	16.11	30.84	15.69
1975年	10.82	11.06	11.52	20.04	7.47

(資料) 表2-1, 2-2, 2-3及び2-4により計算。

(注) nonparametric 推定値は標本データにより計算。

分散¹⁵⁾は時系列比較が可能になるように、消費者物価で調整済みである。この調整済分散の標本推定値は1970年代中期から1990年代中期まで上昇し、それ以降、2005年頃まで低下しており、4つの最適化手法によるほとんどの推定値が同じ変動傾向を示している(図3-3)¹⁶⁾。特に、Nelder-Mead法およびSANN法による推定値は標本推定値の時系列変動と同一である。相対不平等度にしても絶対不平等度にしても従来までに明らかにされている1970年代中期から2005年頃までの不平等度の年次推移が¹⁷⁾10年ごとの推移に再現されている。

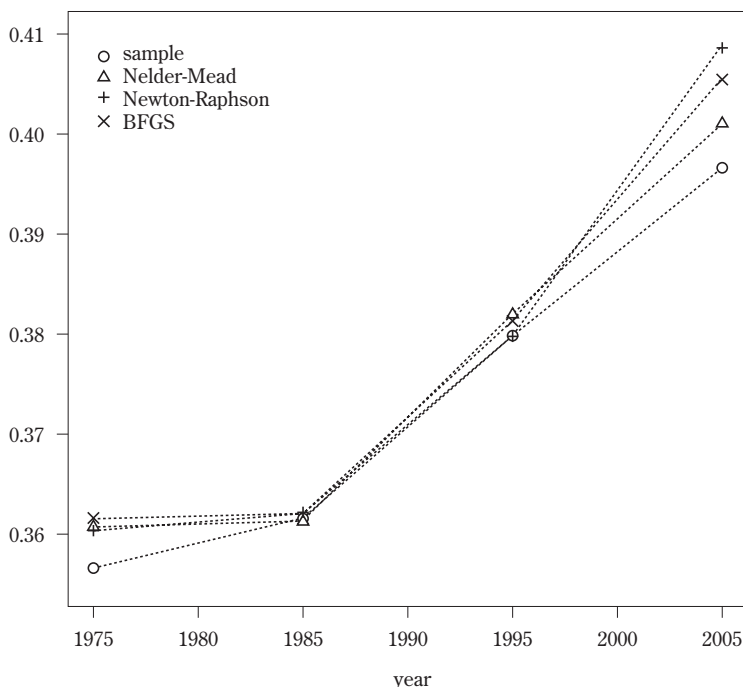
15) 分散が絶対的不平等測度として望ましい性質をいくつかもっていることについては、Chakravarty and Tyagarupananda (1998) および Chakravarty (2001) を参照。

16) Newton-Raphson 法による2005年についての分散は極端な値になっているから、標本分散を含めたその他の手法による分散の推移が示されている。

17) 吉岡 (2007, 2008, 2010)。

図3-1 ジニ係数の推移(1)

Gini indices



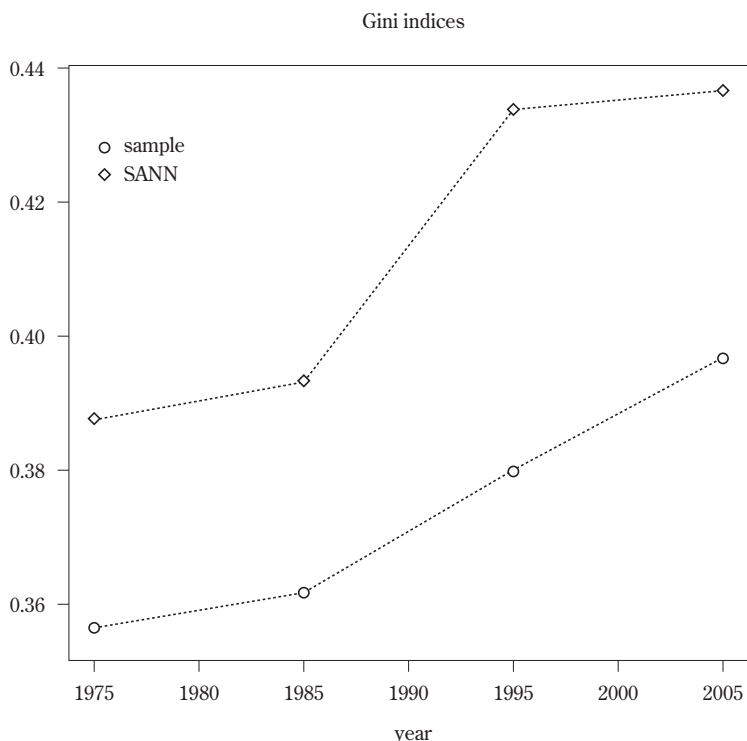
(資料) 表3-1により作成。

おわりに

所得分配に関して分析に十分な量の個票データを入手できることは希で、たいてい集計データしか公表されないことが通常であり、そのような場合にデータの補間や補外ができる分布モデルが利用される。特に、所得分配のデータにおいては、所得階級の最下部や最上部は打ち切りになっており、さらに所得区間の平均値のような代表値が公表されないことがおおい。そこで、所得分配を連続分布とみなす分布モデルの利用価値は高い。

19世紀末以降、所得分配の分布モデルが非常に多く提案されている中で、実用上のその有用性からGB2モデルによる実証研究が1980年代から各国で盛ん

図3-2 ジニ係数の推移(2)

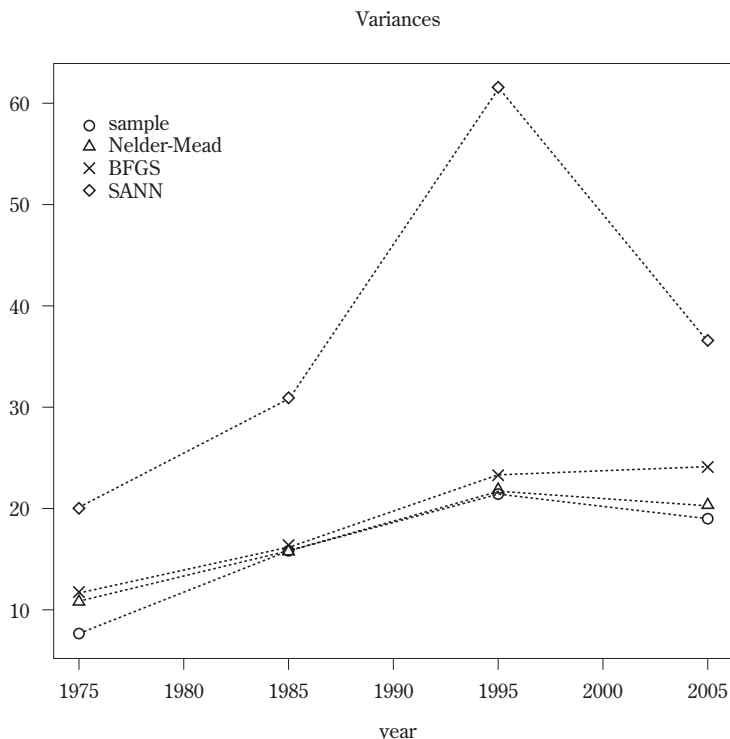


(資料) 表3-1に同じ。

に行われているが、我が国における所得分配の研究ではこのモデルはほとんど採用されない。というよりも、分布モデルの適合度の優劣の判定以外には、より簡単な分布モデルでさえ最近では実証研究で利用されない¹⁸⁾。そこで、本稿では我が国の所得分配の資料の1つである『国民生活基礎調査』(厚生労働省)の世帯所得の集計データにGB2分布モデルが適用された。GB2分布の4つの母数の推定には最尤法が利用され、その際の最適化には4種類の手法(Nelder-Mead, Newton-Raphson, BFGS, SANN)が採用され、その推定結果の比較が試みられた。対数尤度から判定して推定結果が良好な方から並べると、Nelder-

18) 一般化パレート分布を利用した吉岡(2010)とWeibull, Gamma, Fisk及びLognormal分布を利用した吉岡(2010a)とが例外的にある。

図3-3 分散の推移



(資料) 図3-1に同じ。

Mead法, BFGS法, Newton-Raphson法, SANN法となるが, 前3者の対数尤度に大きな差はない。

次に, GB2分布モデルの4つの母数の最尤推定値による絶対的所得不平等度(物価調整済分散)と相対的所得不平等度(ジニ係数, Theil測度, 変動係数)の計算結果が得られた。SANN法以外の3つの最適化手法は, どの不平等測度についても標本推定値に近似した結果をもたらしている。最後に, 実証上のおおきな関心事である不平等度の変動傾向が明らかにされた。相対的不平等度としてのジニ係数, Theil測度および変動係数の標本推定値は1970年代中期から2005年頃まで上昇しており, 4つの最適化手法によるほとんどの相対的不平等度の推定値が同じ変動傾向を示している。絶対的所得不平等度としての物価調

整済分散の標本推定値は1970年代中期から1990年代中期まで上昇し、それ以降、2005年頃まで低下しており、4つの最適化手法によるほとんどの推定値が同じ変動傾向を示している。相対不平等度にしても絶対不平等度にしても従来までに明らかにされている1970年代中期から2005年頃までの不平等度の年次推移が10年ごとの推移に再現された。

参 考 文 献

- 青木昌彦 (1979). 『分配理論』 筑摩書房 第2章。
- Atoda, N., Suruga, T., and Tachibanaki, T. (1988). Statistical Inference of Functional Form for Income Distribution, *Economic Studies Quarterly*, 39, 14-40.
- Chakravarty, S. R. (1990). *Ethical Social Index Numbers*, Berlin : Springer-Verlag.
- Chakravarty, S. R. (2001). The Variance as a Subgroup Decomposable Measure of Inequality, *Social Indicators Research*, 53, 79-85.
- Chakravarty, S. R. and Tyagarupananda, S. (1998). The Subgroup Decomposable Absolute Indices of Inequality, in S. R. Chakravarty et al. (eds.), ch. 11, *Quantitative Economics*, Calcutta : Allied Publishers.
- Champernowne, D. G. (1952). The Graduation of Income Distribution, *Econometrica*, 20, 591-615.
- Cowell, F. A. (1995). *Measuring Inequality*, (2nd ed.), London : Prentice Hall/Harvester.
- Dagum, C. (1977). A New Model of Personal Income Distribution : specification and estimation, *Economie Appliquee*, 30, 413-437.
- Dagum, C. (1990). Generation and Properties of Income Distribution Functions, in C. Dagum and M. Zenga (eds.), *Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty*, 1-17, Heidelberg : Springer-Verlag.
- Fisk, P. R. (1961). The Graduation of Income Distributions, *Econometrica*, 29, 171-185.
- Fletcher, R. (1987). *Practical Methods of Optimization*, (2nd ed.), New York : John Wiley.
- Jenkins, S. P. (1991). The Measurement of Economic Inequality, in L. Osberg (ed.), *Economic Inequality and Poverty*, 3-38, New York : M. E. Sharpe.
- Kleiber, C. and Kotz, S. (2003). *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*, New York : John Wiley.
- McDonald, J. B. (1984). Some Generalized Functions for the Size Distribution of Income, *Econometrica*, 52, 647-663.
- McDonald, J. B. and Ransom, M. R. (2008). The Generalized Beta Distribution as a Model for the Distribution of Income, in D. Chotikapanich (ed.), *Modelling Income Distributions and Lorenz Curves : essays in memory of Camilo Dagum*, New York : Springer-Verlag.
- McDonald J. B. and Xu, Y. J. (1995). A Generalization of the Beta Distribution with Applications, *Journal of Econometrics*, 66, 133-152.
- Nocedal, J. and Wright, S. (1999). *Numerical Optimization*, New York : Springer-Verlag.
- Nygård, F. and Sandström, A. (1981). *Measuring Income Inequality*, Stockholm : Almqvist & Wiksell International.
- Singh, S. K. and Maddala, G. S. (1976). A Function for the Size Distribution of Income,

- Econometrica* 44, 963-970.
- Stacy, E. W. (1962). A Generalization of the Gamma Distribution, *Annals of Mathematical Statistics*, 33, 1187-1192.
- 駿河輝和 (1982). 所得分布の関数型: 『家計調査年報』年間収入の場合『季刊理論経済学』33, 79-85.
- 橘木俊昭・八木匡 (1994). 所得分配の現状と最近の推移 石川経夫編『日本の所得分配と富の分配』東京大学出版会 第1章。
- Thurow, L.C. (1970). Analyzing the American Income Distribution, *American Economic Review*, 60, 261-269.
- 吉岡慎一 (1995). アメリカと日本における所得分配の変動『西南学院大学経済学論集』30(3), 91-133.
- 吉岡慎一 (2007). 日本における所得分配の絶対的及び相対的不平等の計測: 一般化ローレンツ曲線と基数型測度『西南学院大学経済学論集』42(1・2), 127-150.
- 吉岡慎一 (2008). 絶対的及び相対的所得不平等度の要因分解『西南学院大学経済学論集』43(3), 69-105.
- 吉岡慎一 (2010). 貧困の絶対測度と相対測度の計測—Kolm-Zheng 型と FGT 型—『西南学院大学経済学論集』44(2・3), 115-140.
- 吉岡慎一 (2010a). 2000年代の所得不平等度と貧困度の推移—JGSS と官庁統計—『西南学院大学経済学論集』45(3), 89-111.

補論：不平等測度の母数表示

(1) ジニ係数 Gini の母数表示 (McDonald, 1984)

一般化超幾何級数の特別な場合を

$${}_3F_2 \left[\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} ; x \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_1)_i (a_2)_i (a_3)_i x^i}{(b_1)_i (b_2)_i i!} .$$

で定義する。ここに、 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 は複素定数、 x は複素変数、

$$(c)_i = \begin{cases} (c)(c+1)\cdots(c+i-1), & i \geq 1 \\ 1, & i = 0 \end{cases} .$$

である。そこで、

$$G_1 = {}_3F_2 \left[\begin{matrix} 1 & p+q & 2p+1/a \\ p+1 & 2(p+q) \end{matrix} ; 1 \right] .$$

$$G_2 = {}_3F_2 \left[\begin{matrix} 1 & p+q & 2p+1/a \\ p+1/a+1 & 2(p+q) \end{matrix} ; 1 \right] .$$

とおき、ベータ関数 B を用いて

$$G_3 = \frac{B(2q-1/a, 2p+1/a)}{B(p, q)B(p+1/a, q-1/a)} .$$

と表わすとき、ジニ係数は

$$\text{Gini} = G_3 \{ (1/p)G_1 - (1/(p+1/a))G_2 \} .$$

と表わされる。

(2) Theil 測度の母数表示 (McDonald=Ransom, 2008)

プサイ関数 Ψ をガンマ関数 Γ で次のように定義し、

$$\Psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{\Gamma(x)} .$$

$$\mu = \frac{bB(p+1/a, q-1/a)}{B(p, q)} .$$

と表わすとき、Theil 測度は

$$\text{Theil} = (1/a) \{ \Psi(p+1/a) - \Psi(q-1/a) \} + \log(b/\mu) .$$

と表わされる。