

日本の所得分配とパレート裾モデル

— 開端区間の平均値の推定 —

吉 岡 慎 一

はじめに

所得や資産などの分配についての実証研究において、大規模かつ信頼度の高い個票データの入手は限られており、また長期的な時系列分析に堪えうる個票データの入手は困難な現状である。特に後者の場合、信頼度の高いデータとして官庁が提供する集計データに頼らざるを得ないが、そのような集計データはたいてい各所得階級の代表値が公表されていないか、公表されているとしても、集計データの特性上、開端階級の代表値が厳密には明示できないために¹⁾、例えば最上部の開端階級の下限值しか提供されない。分布データの分析のためには開端階級の平均値のような代表値が必須なので、従来の実証研究においては、簡単化のために開端階級の代表値としてその下限値をそのまま用いるか、下限値の1.25倍、1.5倍、2倍などが利用されるように、研究者によって、まちまちかつ明示されないことがたびたびである。その他の方法として、比較的高い所得階級にパレート分布を想定し、その形状母数と最上部の開端階級の下限值から開端階級の平均値を導出する方法があるが、形状母数の推定のためには分布の規模母数としての閾値を事前に設定する必要がある。しかし、この閾値を選択する定まった方法がないから、この目的のためにパレート分布を利用する研究例は次のように少ない。Taubman and Wales (1974) は形状母数の推定のために中央階級以降のデータと中央階級の一階級上の階級以降のデータを利用

1) 特定の年の開端階級の個票データは特定できるから、統計当局の側でその平均所得は計算できるが、それが開端階級の代表値とは厳密にはいえない。

し、この2つの場合の閾値に対応する母数の推定結果を報告している。Parker (1983) は上部の数階級のデータを利用する方法と最上部と最上部の一階級下の階級を利用する方法²⁾に対応する母数の推定結果を報告している。このように、閾値は中央階級から最上部の一階級下の階級までの間にあると想定されている。

形状母数の推定には種々の方法³⁾がある上に、ある一つの方法を決めたとしても、パレート裾モデルが適切となる最小基準値としての閾値を定める決定的な方法はないが、本稿においては閾値ごとに複数の形状母数の推定が行われ、そしてその母数の推定値ごとに開端区間の複数の平均値の推定が行われる。所得分布の実証研究の第一歩は不平等測度や貧困測度のような分配指標を計測することだから、この開端区間の複数の平均の推定値を絞り込む作業が試みられ、従って開端所得階級の平均値の推定結果はこの分野の実証研究の基礎資料となり得よう。形状母数の推定法としては、最尤法と Vandewalle et al.(2007) が提示した頑健推定法が採用され、特に後者の方法に対応する開端区間の平均の推定値を利用して単一母数を含む不平等測度 (S-Gini, アトキンソン, 一般化エントロピー) の我が国における時系列変動が明らかにされる。

1. パレート母数の最尤推定と開端区間の平均値の推定

確率変数 x で所得を表すとき、古典的パレート分布は次のような分布関数で定義される。

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^\theta, x \geq x_0 > 0.$$

ここに、 $\theta > 0$ は形状母数であり、 $x_0 > 0$ は規模母数を表す。密度関数は、

$$f(x) = \frac{\theta x_0^\theta}{x^{\theta+1}}, x \geq x_0 > 0.$$

2) Henson (1967).

3) 例えば、最尤法、最小自乗法、モーメント法、最小分散法、ミニマックス法など (Johnson et al.(1994)).

と表される。 $k < \theta$ の場合にのみ k 次モーメントが存在し、次のように表される。

$$E(X^k) = \frac{\theta x_0^k}{\theta - k}.$$

形状母数の推定にはいくつかの方法があるが、どの推定法においても規模母数としての閾値を事前に決定しておく必要がある。しかし、この閾値を決める一意的な方法がないので複数の候補を考慮して、まず最尤推定法が採用される。 n 個の所得データ $x(j)$, $j=1, \dots, n$ があるとき、形状母数の最尤推定量 $\hat{\theta}$ は次のようになる⁴⁾。

$$\hat{\theta} = n \left[\sum_j \log \frac{x(j)}{x_0} \right]^{-1}, x(j) \geq x_0 > 0.$$

最上部の開端階級の下限值 x_L が所与の場合、この開端区間の平均値 \hat{x}_M は次のようになる。

$$\hat{x}_M = x_L \frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta} - 1}.$$

我が国における所得分配の不平等性の時系列変動は、『国民生活基礎調査』（厚生労働省）の17から25所得階級データ⁵⁾を利用して1970年代中期から2003年あるいは2007年頃までについて、吉岡（2007, 2008, 2010, 2010a）において明らかにされている⁶⁾。そこでは、最上部の開端階級の代表値として簡単化のためにその下限値の1.25倍が利用されている。ここでは同じ資料において、最小基準値としての複数の閾値以上の所得データにパレート分布を想定し、形状母数と最上部の開端区間の平均値を推定した結果が表1および表2である⁷⁾。

4) Johnson et al.(1994).

5) 我が国の所得分配に関する統計資料の概要とその問題点は、青木（1979）、橋木・八木（1994）、吉岡（1995）などを参照。

6) 絶対的測度として Kolm 測度及び分散が、相対的測度として Gini 係数、Theil 測度、Atkinson 測度および平均対数偏差（MLD）が夫々利用されている。

7) 最上部の開端階級の代表値としてその下限値が利用された。

表1 形状母数の最尤推定値

閾値：万円	1995年	2000年	2005年
475			1.978
525		2.005	2.160
575	2.148	2.148	2.330
625	2.341	2.332	2.498
675	2.486	2.489	2.647
725	2.690	2.681	2.789
775	2.837	2.840	2.943
825	2.973	3.022	3.154
875	3.093	3.115	3.244
925	3.267	3.276	3.404
975	3.377	3.397	3.492
1050	3.891	3.851	3.961
1150	4.197	4.117	4.002
1350	6.863	6.454	6.277
1750	20.152	19.463	23.731

(資料) 厚生労働省『国民生活基礎調査』各年版により推定。

表2 開端区間の推定平均値

閾値：万円	単位：万円		
	1995年	2000年	2005年
475			4045
525		3991	3724
575	3743	3742	3503
625	3492	3501	3335
675	3346	3343	3214
725	3184	3190	3118
775	3089	3087	3030
825	3014	2989	2928
875	2956	2946	2891
925	2882	2879	2832
975	2842	2834	2803
1050	2692	2701	2675
1150	2626	2642	2666
1350	2341	2367	2379
1750	2104	2108	2088

(資料) 厚生労働省『国民生活基礎調査』各年版及び表1により推計。

母数を推定するための閾値は各年の中央値以上の値が利用された。全データに最尤法が適用された吉岡（2010）における補論の結果⁸⁾よりも推定結果が安定しているが、それでも母数推定値のバラツキは大きく一般的には、最尤推定量は頑健ではないといわれている。Cowell（1995, ch.4）によると、形状母数 θ は経験的に $1.5 \leq \theta \leq 2.5$ の範囲にある⁹⁾。この母数の値が小さいほど開端区間の推定平均値は大きくなるから、開端区間の平均の控えめな推定値という意味で、形状母数として上記の範囲内の最大値を採用するのが、一つの方法であろう。

2. パレート母数の頑健推定と開端区間の平均値の推定

ここでは、頑健推定量として Vandewalle et al.(2007) が提示した ISE (integrated squared error) 推定量と PDC (partial density component) 推定量が採用される¹⁰⁾。表3は2000年の所得分配に関する形状母数の2種類の頑健推定値であり、閾値ごとに得られている。表3によると、どちらの推定法によっても推定された母数は、閾値の単調増加にたいして徐々に増加するが、閾値が975万円のところから減少に転じている。この転換点としての母数の推定値は経験的に適切な範囲に入っていて局所的な最大値になっており、この推定母数に対応する開端区間の推定平均値は適切な範囲内で平均値の最小値となっている。母数の局所最大推定値に対応する開端区間の平均値の局所最小推定値の結果が表4である。開端階級の下限値は1982年から約30年間、固定されているが、開端階級の2種類の推定平均値の変動は、3種類の全体の推定平均値の変動とほぼ同一¹¹⁾、つまり1970年代中期頃から90年代中期頃まで上昇傾向があり、それ以降2000年代末頃まで低下傾向にある。尚、1985年のPDC法による推定平均値が過小評価、従ってPDC形状母数値が過大評価になっている可能性がある。そ

8) 表1 (p.137).

9) Cramer (1971, p.57) はこの母数が先進諸国では1.9と2.1との間に入ると述べている。

10) ISE 推定法と PDC 推定法の概略は補論1を参照。

11) 開端階級の推定平均値に対応した3種類の全体の推定平均値の推移を示す付表1を参照。

表 3 閾値ごとの形状母数の頑健推定値 (2000年)

閾値：万円	PDC 法	ISE 法
525	0.807	1.138
575	0.947	1.277
625	1.051	1.385
675	1.208	1.539
725	1.326	1.660
775	1.489	1.818
825	1.515	1.856
875	1.634	1.978
925	1.686	2.041
975	1.732	2.099
1050	1.500	1.904
1150	1.449	1.877
1350	1.155	1.594
1750	3.244	3.922

(資料) 厚生労働省『国民生活基礎調査』
2001年版により推定。

表 4 形状母数の頑健推定値と開端階級の推定平均値

所得年	開端階級 下限値	階級数	閾値	ISE	ISE	PDC	PDC
				形状母数	平均値	形状母数	平均値
1975	600	17	475	2.644	965	2.104	1143
1980	1000	21	750	2.410	1709	1.900	2111
1985	2000	25	875	2.417	3411	2.109	3803
1990	2000	25	975	2.281	3561	1.928	4154
1995	2000	25	975	2.090	3836	1.715	4798
2000	2000	25	975	2.099	3820	1.732	4733
2005	2000	25	975	2.227	3631	1.877	4280
2006	2000	25	975	2.109	3803	1.737	4715
2007	2000	25	975	2.109	3685	1.817	4449
2008	2000	25	975	2.205	3660	1.834	4397
2009	2000	25	975	2.214	3647	1.848	4357

(資料) 表 1 に同じ。

の直接の原因は閾値の採り方にあり、1985年の閾値を875万円から775万円にすると推定平均値は3803万円から4144万円になる。

3. 不平等測度の時系列変動；1975—09

本節では表4を利用して不平等測度の計測とその結果の比較が試みられる。不平等測度として頻繁に採用されるジニ係数は、相対的に分配の中間階級にウエイトがかけられている。母数を含む測度は、その母数を変化させることによって低所得階級や高所得階級にウエイトがかけられた結果を提示することができる。つまり、母数表示の測度は、不平等の回避水準を選択することができ、所得分配のどの階級を強調するのかが決めることができる。その結果、ローレンツ擬順序のような煩雑な所得ベクトルの比較をしなくても、スカラーとしての測度を比較することによって、前者の方法論による結果をおおまかに予想することができる場合がある¹²⁾。

そこで本稿では、単一母数を含む三種類の測度：S-Gini 測度¹³⁾、一般化エントロピー測度¹⁴⁾およびアトキンソン測度¹⁵⁾が利用される。非減少順に n 個の所得、 $x(1) \leq x(2) \leq \dots \leq x(n)$ 、があるとき、S-Gini は次式で定義される。

$$\text{S-Gini}(\lambda) = 1 - \frac{1}{\mu n^\lambda} \sum_i^n \left[(n-i+1)^\lambda - (n-i)^\lambda \right] x(i), \quad \lambda \geq 1.$$

ここに、 μ は平均所得であり、 λ は不平等回避母数である。この測度は、 $\lambda = 2$ のとき通常のジニ係数であり、 $\lambda = 3$ のとき Mehran (1976) 測度になり、回避母数値が大きくなるほど相対的に低所得階級にウエイトがかけられることになるので不平等回避的といわれる。一般化エントロピー測度は次式で定義される。

$$\text{GE}(\alpha) = \frac{1}{n\alpha(\alpha-1)} \sum_i^n \left[\left(\frac{x(i)}{\mu} \right)^\alpha - 1 \right], \quad \alpha \neq 0, 1.$$

12) しかし、慎重かつ正確を期すためにはスカラー比較の立場よりもベクトル比較の立場のほうが望ましい。後者の立場から所得分配の擬順序分析を行った研究に我が国では吉岡 (2007) がある。

13) Donaldson = Weymark (1980, 1983), Yitzhaki (1983).

14) Bourguignon (1979), Cowell (1980), Kuga (1980), Toyoda (1980).

15) Atkinson (1970).

ここに、 α は不平等回避母数であり、この値が小さいほど不平等回避的といわれる。 $\alpha = 1$ のとき Theil (1967) 測度が⁸、 $\alpha = 0$ のとき平均対数偏差 (MLD) が夫々に対応する。アトキンソン測度は次式で定義される。

$$A(\varepsilon) = 1 - \left[\frac{1}{n} \sum_i^n \left(\frac{x(i)}{\mu} \right)^{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \varepsilon \neq 1,$$

$$A(1) = 1 - \exp \left[\frac{1}{n} \sum_i^n \ln \left(\frac{x(i)}{\mu} \right) \right], \quad \varepsilon = 1.$$

ここに、 ε は不平等回避母数であり、この値が大きいほど不平等回避的といわれる。 $\varepsilon = 1 - \alpha > 0$ のときアトキンソン測度は一般化エントロピー測度の単調変換になるから、両測度は同一の不平等順序を示す¹⁶⁾。

開端階級の下限值と推定平均値を用いて S-Gini 係数を推定した結果が表 5 および表 6 である。中所得階級にウエイトがかけられた 3 種類の通常のジニ係数は、1980年代初頭から2000年頃までほぼ同様の上昇傾向であり、2000年代における開端階級の 2 種類の推定平均値の低下傾向と推定全体平均値の低下傾向とを反映して ISE 法によるジニ係数および PDC 法によるジニ係数は、2005年頃に低下して以降、高止まりの状態のようである。これにたいし、1982年から約30年間一定に留められている開端階級の下限值が利用されたジニ係数は、90年代中期からの全体の平均所得の低下傾向の影響を受けず、2000年代も2008年を頂点に上昇傾向が窺える。開端階級の平均値の処理の仕方によって、所得分布全体の平均値の変動傾向は変わらないが、分布全体の不平等度の変動傾向は異なるようである。また、ここで採用された他の 2 つの母数値に対応する S-Gini の時系列変動も上で述べられた通常のジニ係数の変動とほぼ同じであるといえる。

開端階級の下限值と推定平均値を用いてアトキンソン測度を推定した結果が表 7 および表 8 である。相対的低所得階級にウエイトがかけられた母数値 2 の 3 種類のアトキンソン測度は、1980年代初頭から2000年頃まで、3 種のジニ係

16) Cowell (1995).

表 5 開端階級の下限值を用いた S-Gini 係数

母数	1.5	2.0	3.0
1975	0.2078	0.3288	0.4640
1980	0.2040	0.3204	0.4517
1985	0.2329	0.3564	0.4919
1990	0.2343	0.3618	0.5019
1995	0.2349	0.3655	0.5094
2000	0.2502	0.3870	0.5347
2005	0.2537	0.3902	0.5362
2006	0.2550	0.3919	0.5380
2007	0.2521	0.3874	0.5324
2008	0.2593	0.3981	0.5453
2009	0.2541	0.3897	0.5340

(資料) 表 1 に同じ。

表 6 開端階級の推定平均値を用いた S-Gini 係数

母数	ISE			PDC		
	1.5	2.0	3.0	1.5	2.0	3.0
1975	0.2481	0.3732	0.5023	0.2657	0.3926	0.5191
1980	0.2379	0.3561	0.4818	0.2556	0.3746	0.4974
1985	0.2478	0.3704	0.5031	0.2519	0.3742	0.5061
1990	0.2589	0.3857	0.5210	0.2678	0.3942	0.5278
1995	0.2672	0.3973	0.5346	0.2828	0.4126	0.5469
2000	0.2822	0.4180	0.5589	0.2971	0.4324	0.5701
2005	0.2759	0.4111	0.5524	0.2844	0.4190	0.5585
2006	0.2824	0.4180	0.5583	0.2946	0.4296	0.5673
2007	0.2764	0.4104	0.5503	0.2868	0.4202	0.5579
2008	0.2814	0.4187	0.5612	0.2907	0.4274	0.5679
2009	0.2756	0.4100	0.5498	0.2845	0.4183	0.5562

(資料) 厚生労働省『国民生活基礎調査』各年版及び表 4 により推計。

数の場合とほぼ同様の上昇傾向を示し、それ以降2000年代末頃まで高止まりか低下しているようである。母数値 (0.1, 0.5) によっては下限値利用のアトキンソン測度が2005年頃に上昇し、さらに2000年代末頃まで上昇している場合がある。

表 9, 表10および表11は開端階級の下限值と推定平均値を用いて一般化エントロピー (GE) 測度を推定した結果である。GE 測度の母数は任意の実数値をとるので、S-Gini 係数やアトキンソン測度が示す結果を含んだ結果が得られる。低所得階級にウエイトがかけられた母数値-3の場合の3種類の GE 測度は、

表7 開端階級の下限值を用いた Atkinson 測度

母数	0.1	0.5	1.5	2.0
1975	0.0173	0.0883	0.2702	0.3570
1980	0.0166	0.0847	0.2638	0.3547
1985	0.0211	0.1051	0.3121	0.4094
1990	0.0215	0.1086	0.3310	0.4376
1995	0.0218	0.1110	0.3430	0.4544
2000	0.0244	0.1237	0.3737	0.4871
2005	0.0249	0.1249	0.3686	0.4757
2006	0.0251	0.1259	0.3719	0.4804
2007	0.0245	0.1228	0.3612	0.4657
2008	0.0258	0.1294	0.3782	0.4851
2009	0.0248	0.1239	0.3618	0.4656

(資料) 表6に同じ。

表8 開端階級の推定平均値を用いた Atkinson 測度

母数	ISE				PDC			
	0.1	0.5	1.5	2.0	0.1	0.5	1.5	2.0
1975	0.0236	0.1140	0.3141	0.3999	0.0271	0.1277	0.3347	0.4194
1980	0.0221	0.1064	0.2987	0.3882	0.0258	0.1202	0.3181	0.4062
1985	0.0241	0.1158	0.3262	0.4221	0.0250	0.1191	0.3301	0.4256
1990	0.0261	0.1258	0.3544	0.4585	0.0282	0.1330	0.3632	0.4662
1995	0.0278	0.1334	0.3738	0.4817	0.0315	0.1465	0.3895	0.4951
2000	0.0307	0.1467	0.4037	0.5132	0.0343	0.1594	0.4182	0.5255
2005	0.0292	0.1407	0.3890	0.4936	0.0312	0.1476	0.3970	0.5005
2006	0.0306	0.1459	0.3975	0.5027	0.0337	0.1563	0.4093	0.5127
2007	0.0294	0.1404	0.3839	0.4857	0.0319	0.1492	0.3940	0.4944
2008	0.0302	0.1454	0.3984	0.5028	0.0326	0.1532	0.4072	0.5103
2009	0.0291	0.1394	0.3818	0.4832	0.0312	0.1468	0.3903	0.4906

(資料) 表6に同じ。

1970年代中期から2000年頃まで上昇傾向を示し、それ以降2000年代末頃まで低下傾向にある¹⁷⁾。中所得階級にウエイトがかけられた3種類のタイル測度は、1970年代中期から2000年頃までは、3種類のジニ係数の場合や母数値2の3種類のアトキンソン測度の場合とほぼ同様にゆるやかな上昇傾向を示し、それ以降2000年代末頃まで高止まりのようである¹⁸⁾。高所得階級にウエイトがかけ

17) 母数値-1の場合の3種類のGE測度は、母数値2のアトキンソン測度の場合と同様に、1980年代初頭から2000年頃まで上昇傾向を示し、それ以降2000年代末頃まで低下している。

表9 開端階級の下限值を用いた一般化エントロピー測定

母数	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	0.5	1.0 : Theil	2.0	3.0	4.0
1975	1.2062	0.5043	0.2776	0.1976	0.1806	0.1726	0.1760	0.2028	0.2588
1980	1.6273	0.5522	0.2748	0.1899	0.1732	0.1657	0.1709	0.2007	0.2634
1985	2.2535	0.7300	0.3465	0.2350	0.2159	0.2110	0.2372	0.3267	0.5462
1990	3.4056	0.9234	0.3890	0.2479	0.2234	0.2144	0.2316	0.2996	0.4549
1995	4.2028	1.0486	0.4164	0.2566	0.2284	0.2169	0.2281	0.2839	0.4078
2000	5.0508	1.2333	0.4749	0.2875	0.2556	0.2434	0.2607	0.3358	0.5065
2005	3.8701	1.0764	0.4536	0.2868	0.2581	0.2483	0.2718	0.3611	0.5687
2006	4.1639	1.1220	0.4622	0.2896	0.2603	0.2503	0.2740	0.3638	0.5723
2007	3.3731	0.9944	0.4358	0.2807	0.2537	0.2447	0.2687	0.3582	0.5676
2008	4.0364	1.1218	0.4711	0.2975	0.2678	0.2579	0.2836	0.3797	0.6050
2009	3.3533	0.9896	0.4356	0.2823	0.2559	0.2476	0.2735	0.3666	0.5840

(資料) 表6に同じ。

表10 開端階級のISE推定平均値を用いた一般化エントロピー測定

母数	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	0.5	1.0 : Theil	2.0	3.0	4.0
1975	1.5291	0.6111	0.3332	0.2467	0.2350	0.2380	0.2887	0.4305	0.7688
1980	1.9437	0.6378	0.3173	0.2294	0.2189	0.2233	0.2808	0.4504	0.8996
1985	2.4152	0.7709	0.3652	0.2532	0.2388	0.2436	0.3245	0.6261	1.7427
1990	3.8387	1.0117	0.4234	0.2783	0.2601	0.2644	0.3507	0.6543	1.6719
1995	4.9405	1.1840	0.4647	0.2970	0.2765	0.2811	0.3754	0.7048	1.7915
2000	5.9451	1.3913	0.5272	0.3292	0.3051	0.3105	0.4221	0.8253	2.2233
2005	4.3155	1.1679	0.4873	0.3150	0.2921	0.2951	0.3894	0.7359	1.9513
2006	4.7751	1.2427	0.5054	0.3253	0.3033	0.3098	0.4254	0.8556	2.4305
2007	3.8029	1.0886	0.4722	0.3119	0.2915	0.2972	0.4026	0.7939	2.2143
2008	4.5004	1.2167	0.5055	0.3259	0.3022	0.3057	0.4069	0.7858	2.1588
2009	3.7267	1.0718	0.4676	0.3097	0.2893	0.2939	0.3923	0.7552	2.0605

(資料) 表6に同じ。

表11 開端階級のPDC推定平均値を用いた一般化エントロピー測定

母数	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	0.5	1.0 : Theil	2.0	3.0	4.0
1975	1.7045	0.6663	0.3611	0.2720	0.2642	0.2751	0.3627	0.6089	1.2525
1980	2.1393	0.6886	0.3420	0.2534	0.2480	0.2626	0.3710	0.7059	1.7257
1985	2.4614	0.7824	0.3705	0.2584	0.2457	0.2541	0.3583	0.7689	2.4529
1990	4.0122	1.0461	0.4366	0.2904	0.2754	0.2869	0.4156	0.8972	2.7295
1995	5.3589	1.2580	0.4904	0.3194	0.3045	0.3219	0.4921	1.1391	3.6776
2000	6.4304	1.4738	0.5537	0.3511	0.3326	0.3508	0.5428	1.3013	4.4188
2005	4.5017	1.2053	0.5009	0.3268	0.3070	0.3174	0.4580	1.0138	3.2666
2006	5.0855	1.3021	0.5261	0.3431	0.3259	0.3437	0.5330	1.3110	4.6937
2007	4.0089	1.1326	0.4889	0.3267	0.3104	0.3226	0.4922	1.1696	4.0627
2008	4.7172	1.2600	0.5210	0.3392	0.3191	0.3311	0.4879	1.1291	3.8642
2009	3.8956	1.1082	0.4815	0.3221	0.3052	0.3178	0.4679	1.0725	3.6210

(資料) 表6に同じ。

られた母数値4のGE測度の変動はいくぶん複雑で、3種類の評価法で評価結果が若干異なる。PDC法によるGE測度の変動は、本稿で採用された他の母数値に対応するGE測度の変動とだいたい同じで、1970年代中期から2000年頃までは上昇傾向を示し、それ以降2000年代はやや低下している。ISE法によるGE(4)測度の変動は、1980年代中期から1990年頃上昇が観られなかった点を除けば、PDC法によるGE(4)測度の変動とほぼ同じである¹⁹⁾。下限値が利用されたGE(4)測度の変動は、1970年代中期から2000年頃までの上昇パターンについてはISE法によるGE(4)測度の変動とだいたい同じだが、2000年代も2008年頃をピークにやや上昇している点が異なる。

以上のように僅か3種類の不平等測度によっても、また同一の不平等測度内でも採用された母数値によって、不平等度の変動傾向は少しばかり異なる。特に母数値によって評価結果が異なるのは、所得分布のどの部分を重視するのかによっているからであり、いわゆる所得ローレンツ曲線の交叉の可能性があるからである²⁰⁾。しかし、不平等度の変動についての判断に影響を及ぼすのは、採用される不平等測度の種類や不平等測度において採用される母数値とともに、所得分布の開端階級の代表値の処理の仕方である。

おわりに

パレートモデルにおいて、そのモデルを想定することを可能にする分布内の最小基準点としての閾値を事前に決めることが先決事項で、それが決まるとモデル特有の母数の豊富にある推定法を適用することになる。しかし、過去の研

18) 母数値2の場合の3種類のGE(2)の変動は、1980年のPDC法によるGE(2)の変動方向以外、GE(1)=Theil測度の時系列変動とほぼ同様であり、1985年のPDC法によるGEの低下まで両測度で一致している。

19) 不平等のピークが2006年である点まで一致している。だが、下限値利用のGE(4)測度による不平等のピークは2008年であり、他の測度による不平等のピークは2008年か2000年かである。

20) このことを母数値の範囲を広く採ることのできるGE測度で確認したのが補論2である。スカラー測度のような全順序の立場を採るか、ローレンツ擬順序のような擬順序の立場を採るかによって、不平等に関する評価が幾分違ってくる。

究の蓄積によって閾値のおおよその範囲は定められても、点として確定することは困難であった。ここでは、逆の発想を試みることによって、点としての閾値の候補が明示された。つまり、閾値を変動させることによって、母数の複数の推定値が得られる。100年以上にわたる所得分布の研究においてパレート母数はある範囲内の値になることが、経験的に分かっている。その範囲内にある推定母数は閾値の単調増加にたいして、徐々に増加するがある点から減少に転じる。この転換点としての最大点が推定母数の第一候補とされ、それに対応する閾値が定まる。このとき開端区間の推定平均値は適切な範囲内で平均値の最小点となっている。パレートモデルという大胆な想定がなされたからには、控えめな結果が採用され、提示された表4（開端所得階級の推定平均値）はこの分野の実証研究の基礎資料になり得ると思われる。

次にこの表4の結果を利用して、1970年代中期から2000年代末にかけての我が国における単一母数表示の3種類の所得不平等測度（S-Gini, アトキンソン、一般化エントロピー）の時系列変動の比較が行われた。他の条件が同じなら、開端階級の推定平均値が大きいほど、どの不平等測度を採用しても不平等度が高くなる。さらに、開端階級の平均値の処理の仕方によって、所得分布全体の平均値の変動傾向はほとんど変わらないが、分布全体の不平等度の変動傾向は異なるといえる。このことを理論においても実証においても頻繁に利用される通常のジニ係数で再述しておく。母数値を変化させることによって、不平等測度の測定に際しどの所得階級にウエイトをかけるかを定めることができるが、中所得階級にウエイトがかけられた3種類の通常のジニ係数の場合、1980年代初頭から2000年頃まではほぼ同様の上昇傾向であり、2000年代における開端階級の2種類の推定平均値の低下傾向と全体の推定平均値の低下傾向とを反映してISE法によるジニ係数およびPDC法によるジニ係数は2005年頃に低下して以降、高止まりの状態である。しかし、1982年から約30年間一定に留められている開端階級の下限值が利用されたジニ係数は、90年代中期からの全体の平均所得の低下傾向の影響を受けず、2008年を頂点に上昇傾向が窺える。開端階級の下限值が利用された場合には、2000年代の開端階級の平均値の低下も不平等測度の変動に反映されないようである。したがって、本稿で採用された『国民生

活基礎調査』(厚生労働省)における世帯についての所得分配に関していえば、例えば分布全体の平均所得に連動するように、少なくとも5年置きくらいにこの下限値を改訂すべきであろう。また、分布全体の平均所得だけでなく参考のために開端階級の平均所得の公表が望まれる。

本稿で採用された範囲内の他の母数値の S-Gini 係数の変動も複数母数値のアトキンソン測度の変動も、通常のジニ係数の変動と大きな違いはない。このことの要因の一つは本稿で採用された狭い範囲の母数値による影響だと考えられる。しかし、S-Gini 係数およびアトキンソン測度の母数値はある正定数以上の値しか採らず、一般化エントロピー測度の母数値は相対的に厳しい制限がなく負値および正値を採ることができるから、この測度は前二者の測度よりもやや融通性に富み、このことは本稿で採用された狭い範囲の母数値によってでも実証的に窺える。

参考文献

- 青木昌彦 (1979). 『分配理論』 筑摩書房 第2章.
- Atkinson, A. B. (1970). On the Measurement of Inequality, *Journal of Economic Theory*, 2, 244-263.
- Bourguignon, F. (1979). Decomposable Income Inequality Measures, *Econometrica*, 47, 901-920.
- Cowell, F. A. (1980). On the Structure of Additive Inequality Measures, *Review of Economic Studies*, 47, 521-531.
- Cowell, F. A. (1995). *Measuring Inequality*, 2nd ed., London : Prentice Hall/Harvester.
- Cramer, J. S. (1971). *Empirical Econometrics*, Amsterdam : North-Holland.
- Donaldson, D. and Weymark, J. (1980). A Single-Parameter Generalization of the Gini Indices of Inequality, *Journal of Economic Theory*, 22, 67-86.
- Donaldson, D. and Weymark, J. (1983). Ethically Flexible Gini indices for Income Distributions in the Continuum, *Journal of Economic Theory*, 29, 353-358.
- Henson, M. F. (1967). *Trends in the Income of Families and Persons in the United States, 1947-1964*, U.S. Bureau of Census, Technical Paper No.14, Washington.
- Johnson, N. L., Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions, Vol.2*, 2nd ed. New York : John Wiley.
- Kuga, K. (1980). Gini Index and the Generalized Entropy Class, 『季刊理論経済学』 31(3), 217-228.
- Mehran, F. (1976). Linear Measures of Inequality, *Econometrica*, 44, 805-809.
- Parker, P. J. (1983). The Pareto Curve and Its Utility for Open-Ended Income Distributions in Survey Research, *Social Forces*, 61, 872-885.
- Scott, D. W. (2001). Parametric Statistical Modeling by Minimum Integrated Square Error,

- Technometrics*, 43, 274-285.
- Scott, D. W. (2004). Partial Mixture Estimation and Outlier Detection in Data and Regression, in M. Hubert, G. Pison, A. Struyf and S. Van Aelst (eds.), *Theory and Applications of Recent Robust Methods*, Basel : Birkhauser, 297-306.
- 橋本俊昭・八木匡 (1994). 所得分配の現状と最近の推移 石川経夫編『日本の所得分配と富の分配』東京大学出版会 第1章.
- Taubman, P. J. and Wales, T. (1974). Appendix C : Estimation of the Mean Income for the Open-Ended Class, in P. J. Taubman and T. Wales (eds.), *Higher Education and Earnings*, National Bureau of Economic Research, UMI, 193-194.
- Theil, H. (1967). *Economics and Information Theory*, Amsterdam : North Holland.
- Toyoda, T. (1980). Decomposability of Inequality Measures, 『季刊理論経済学』31(3), 207-216.
- Vandewalle, B., Beirlant, J., Christmann, A., and Hubert, M. (2007). A Robust Estimator for the Tail Index of Pareto-type Distributions, *Computational Statistics & Data Analysis*, 51, 6252-6268.
- Yitzhaki, S. (1983). On an Extension of the Gini Inequality Index, *International Economic Review*, 24, 617-627.
- 吉岡慎一 (1995). アメリカと日本における所得分配の変動『西南学院大学経済学論集』30(3), 91-133.
- 吉岡慎一 (2007). 日本における所得分配の絶対的及び相対的不平等の計測：一般化ローレンツ曲線と基数型測度『西南学院大学経済学論集』42(1・2), 127-150.
- 吉岡慎一 (2008). 絶対的及び相対的所得不平等度の要因分解『西南学院大学経済学論集』43(3), 69-105.
- 吉岡慎一 (2010). 貧困の絶対測度と相対測度の計測－Kolm-Zheng 型と FGT 型－『西南学院大学経済学論集』44(2・3), 115-140.
- 吉岡慎一 (2010a). 2000年代の所得不平等度と貧困度の推移－JGSS と官庁統計－『西南学院大学経済学論集』45(3), 89-111.

付表1 分布全体の推定平均値

単位：万円

開端階級 代表値	下限値	ISE 平均値	PDC 平均値
1975	252.9	272.5	282.0
1980	387.5	410.0	422.8
1985	488.1	499.1	502.2
1990	587.9	611.3	620.1
1995	647.1	682.3	700.8
2000	602.5	635.6	652.2
2005	556.6	576.8	584.8
2009	541.6	560.5	568.7

(資料) 厚生労働省『国民生活基礎調査』各年版及び表4により推計。

補論 1 : パレート分布の形状母数の頑健推定法

Scott (2001, 2004) における ISE (integrated squared error) 推定法と PDC (partial density component) 推定法をパレートモデルに応用したのが, Vandewalle et al.(2007) である。

1. ISE (integrated squared error) 推定量

Vandewalle et al.(2007) においては, 次の相対超過によってパレート分布がモデル化される。

$$y(i) = \frac{x(n-k+i)}{x(n-k)}, i=1, \dots, k.$$

ここに, n は全観測数であり k はパレートモデルに使用される観測数である。この相対超過に関するパレート分布の密度関数は,

$$f_{\theta}(y) = \frac{\theta}{y^{\theta+1}}.$$

によって近似される。母数 θ の推定値は, 次のように密度に関する二乗誤差の積分を最小化する $\hat{\theta}$ である。

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \arg \min_{\theta} \left[\int (f_{\theta}(y) - f(y))^2 dy \right] \\ &= \arg \min_{\theta} \left[\int f_{\theta}^2(y) dy - 2 \int f_{\theta}(y) f(y) dy + \int f^2(y) dy \right]. \end{aligned}$$

ここに $f(y)$ は未知の真の密度関数である。この式の最後の項は θ を含んでいないから省略でき, さらに第二項は期待値だから,

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \left[\int f_{\theta}^2(y) dy - 2E(f_{\theta}(Y)) \right].$$

と書くことができる。そこで ISE 推定量は, この期待値の不偏推定量として平均を用いることによって, 次のように得られる。

$$\hat{\theta}_{ISE} = \arg \min_{\theta} \left[\int f_{\theta}^2(y) dy - \frac{2}{k} \sum_i^k f_{\theta}(y_i) \right].$$

2. PDC (partial density component) 推定量

PDC 推定量は次のように密度混合モデル uf_θ において、二乗誤差の積分を最小化することによって得られる。

$$\hat{\theta}_{PDC} = \arg \min_{\theta} \left[u^2 \int f_{\theta}^2(y) dy - \frac{2u}{k} \sum_i^k f_{\theta}(y_i) \right].$$

母数 u の推定値を得るために上式の大括弧内の式を u で微分した結果をゼロとおき、この母数について解くと次式を得る。

$$\hat{u} = \frac{\frac{1}{k} \sum_i^k f_{\theta}(y_i)}{\int f_{\theta}^2(y) dy}.$$

母数 u は標本の中で想定されたモデルが当てはまる部分の尺度と解釈することができる。

補論 2：一般化エントロピー測度によるローレンツ曲線の交叉の判定

次の附表 2 は表 9、表 10 および表 11 (GE 測度) により作成されたローレンツ曲線の交叉の有無等の判定結果である。各年の所得ローレンツ曲線の交叉の

附表 2 GE 測度によるローレンツ優越関係

	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2009
1975	X(2)	≤	≤	≤	≤	≤	≤
1980		X(2)	≤	≤	≤	≤	≤
1985			X(1)	X(1)	X(1)	≤	≤
1990				X(1)	≤	≤	X(1)
1995					≤	X(2)	X(2)
2000						X(1)	X(1)
2005							X(1)

(資料) 表 9、表 10 及び表 11 により作成。

(注) 1. X: 交叉があることを示し, () 内の数字は交叉の回数を表す。

2. ≤: 上側の分配のほうが左側の分配よりも相対的不平等度が低いことを示す。

有無およびその回数を点検することができ、吉岡（2007）の表 3 - 3（p.139）に提示されているローレンツ優越関係と矛盾はない。1980年と1985年のローレンツ曲線の交叉はアトキンソン測度および S-Gini 係数の推定結果からも確認できる。また、2000年と2005年のローレンツ曲線の交叉はアトキンソン測度の推定結果からも確認できる。