寡占市場のオプション・ゲーム：標準モデルの展望と産業組織分析への展開

加　藤　　　浩

1．はじめに

1.1　問題の所在

市場を取り巻く環境は往々にして不確実性に支配されており，その下で企業は M&A や参入・撤退，あるいは R&D や新製品導入といった，不可逆性を持つ意思決定を行う。これが，現代産業における市場行動の大きな特徴である。例えば，IT 産業では M&A が頻繁に行われているが，買収対象の企業が所有する技術の市場価値が M&A の決定に大きな影響を与える。しかし，IT の技術進歩は著しく，その市場価値は不確実であるため，M&A の意思決定をより困難なものにさせている[1)]。また，製薬業界では，R&D の成果がその企業の帰趨を決めるといっても過言ではないが，R&D 投資には大きな不確実性と不可逆性が伴う。つまり，いったん R&D に投じた資源は，転売による回収が困難である

1)　1997 年に Microsoft 社が，設立間もない Networks 社を 4 億 2500 万ドルで買収した。Networks 社は，セット・トップ・ボックスのメーカーで，インターネットの情報をテレビ受信機に送る技術を所有していた。買収時点で，Networks 社は 3000 万ドルの赤字を出しており，収益を生みだしていなかったが，デジタルテレビ時代の到来で，成長オプション（将来の成長が期待される投資機会）価値の高い技術を所有していた。また，同年に，Hewlett-Packard 社が，クレジットカード認証装置のメーカーである VeriFone 社を 11 億 5000 万ドルで買収した。VeriFone 社の 1996 年の収益は 3930 万ドルに過ぎなかったので，買収の NPV だけ見ると赤字である。しかし，電子商取引事業の発展で，VeriFone 社の所有する技術は成長オプション価値が非常に高いものであった（Smit and Trigeorgis（2004））。

（つまり，埋没費用である）にも関わらず，開発が成功するか否か，あるいは開発された製薬が政府に認可されるかといった, R&D の成果については大きな不確実性が備わっている。したがって，このような先天的な不確実性と不可逆性を考慮に入れて，新薬開発への投資額を決めることが合理的な意思決定となる。さらに，わが国の家電産業は，海外の販路を確保することを余儀なくされているが，ランダムに変動する為替レートに連動して獲得できる利潤も大きく変動する。このような利潤の不安定性は，新分野への進出や新モデルの導入といった，メーカーにとり重要な決定に多大な影響を与えている[2)]。これらの産業は，いずれも寡占市場であり，投資機会を巡って企業間で競争が繰り広げられている。産業組織論においても，不確実性と不可逆性，そして企業間の競争で特徴付けられる投資行動の理論分析は，現代産業の動向を知る上で，重要な研究となっている。

経済学では，不確実性のある環境のもとで，不可逆性を備えた投資機会を持つことを，「リアル・オプション（real options）」を所有していると解釈して，理論モデルを構築することがある。つまり，ある投資を実行する機会（＝権利）を「オプション」とみなし，環境が好転すれば投資を実行（＝オプションを行使）し，悪化したならば投資計画を延期する（＝オプションを保持し続ける）のである[3)]。ただし，金融オプションでは，購入者が排他的にオプションを行使できるのに対して，リアル・オプションには，同じ投資機会に直面しているならば，複数の所有者が存在する[4)]。さらに，投資機会について競合関係にあるときは，相手企業が投資を実行（＝オプション行使）することで，自企業が

---

2) Kulatilaka and Perotti（1998）によると，成長オプションが与える戦略上の優位性が強いとき，不確実性が大きいほど，オプションへの投資が活発になる。

3) このオプションは，満期が無限時間のアメリカ型コール・オプションの性質を持っている。ただし，投資機会が T 時間で消滅するならば，満期は T 時間となる。さらに，T 時間後の満期にのみ，投資が実行できるならば，ヨーロッパ型コール・オプションの性質を持つ。

4) Smit and Trigeorgis（2004）では，リアル・オプションを，1 企業によって占有される proprietary option と，競合企業数社で共有される shared option とに区別して議論している。shared option はどの企業も行使でき，その価値は競合企業の行使によって影響を受ける。このことから，shared option のみがオプション・ゲームの扱う対象となる。

持つオプションの価値は影響を受ける。例えば，新しい機能を持つ新製品の開発に成功した企業は，次にどのタイミングで市場に新製品を導入することが最適になるかを考える。これは新製品導入のオプションを持っていると見ることができ，オプション価値が最大となる状況で行使して，新製品からの独占レントを享受する。しかし，競合企業が類似した新製品を開発したならば，自企業と同じオプションを持つことになる。このとき自企業よりも先に新製品を市場へと導入し，市場シェアを大きく確保してしまうと，遅れて導入しても得られる利潤が少なくなってしまう[5)]。これは，オプション行使を先制（preemption）され, 自企業が持っているオプション価値が低下してしまうことと同義である。このように，オプション行使は互いの価値に影響を及ぼしあうので，行使に関して企業間でゲーム（＝オプション・ゲーム）がプレイされていると考えることができる。

オプション・ゲームでの最適な行使戦略は，２つの効果を考慮に入れて決められる。それは,「オプション効果（option effect)」と「戦略効果（strategic effect)」であり，両者はトレード・オフの関係にある。「オプション効果」とは，投資を柔軟に決定できる能力を持つことによる利益である。投資は不可逆的であるので，投資を中止しても原状回復ができない。不確実性のある環境下で柔軟性を持つことは，機が熟すまで投資を遅らせ，市場の反応といった情報を多く得ることによって，より適切なタイミングでの投資実行を可能にする。一方，「戦略効果」とは，相手企業に先制して投資を行うことで，将来時点において，自企業にとり有利な競争環境を導くことにより生み出される利益である。すなわち，いち早く投資することがコミットメントとなり，相手企業は遅く投資するしか選択肢がなくなるのである。生産費用や需要について，自企業が圧倒的な

---

5) 一般的に考えると，先導者が大きな市場シェアを確実に得ることができるとは限らない。つまり，先導者の価値が常に高くなるとは限らない。Tsekrekos（2003）では，先導者が獲得できる市場シェアを外生的に与え，先手の利益を表すパラメータとして設定した。Paxson and Pinto（2003）では，先導者の市場シェアがポアソン分布に従って変動するモデルを構築した。

競争優位を持つことで競争圧力が弱くなり，かつ直面する環境の不確実性が大きいほど，オプション効果がゲームを支配する[6)]。このとき，NPV（割引純現在価値）が十分大きな水準になるまで投資しないので，投資決定はNPVルールから大きく乖離する。したがって，NPVルールと比べて投資実行の時期は遅くなる。他方で，先導者として投資するメリットが大きいほど戦略効果が強くなり，先導者になるための競争が発生する。これにより，どの企業も先手の利益を失うことを恐れ，オプション価値を無視して投資することになる。その結果，投資決定はNPVルールに近くなり，投資実行の時期は早まる（Cottrell and Sick (2001)）[7)]。

本稿の目的は，オプション・ゲームを様々な設定でモデル化した既存研究のうち，標準的なモデルを取り上げ，詳細に検討することである。この標準モデルは汎用性があり，M&AやR&D，参入・撤退，さらには新製品導入など，具体的な投資理論へと拡張できる。これらの投資は，産業組織論でも重要なテーマとなっており，オプション・ゲームは不確実性・不可逆性・寡占競争という視点を与え，より豊かな分析を可能にしてくれる。本稿では以下の順番に従い議論が進められる。(1)標準モデルの設定（２節）。オプション・ゲームで重要となるパラメータを取り上げ，それらに標準的な仮定を与える。(2)価値関数（value function）の導出（３節）。「微分法アプローチ（differential method）」と「積分法アプローチ（integral method）」の２つの方法によって導出する[8)]。いずれの方法を用いても，導かれる価値関数は同じであることが示される。(3)連続時間ゲームにおける戦略の定義（４節）。まず，投資について先導者（leader）・追随者（follower）の役割が外生的に与えられたときに取られる，「開ループ戦略（open-loop strategy）」をベンチマークとして扱う。次に，連続時間

---

6)　標準的なリアル・オプションの研究では，proprietary optionを想定しており，企業が単独で投資決定を行うモデルが中心だった。つまり，オプション効果しか考慮に入れられていなかった。

7)　Lambrecht and Perraudin (2003) によると，追随者が全く利潤フローを得ないときは，先制閾値θ_Pでの投資決定は，NPVルールと一致する。

8)　Dias and Teixeira（2010）の命名に従っている。

ゲームにおける戦略の概念として適切な，「閉ループ戦略（closed-loop strategy）」を考える。この戦略をもとにして決められた投資時間によって，先導者・追随者が内生的に決まる。(3)均衡の導出（４節）。閉ループ均衡には，先導者が著しく早く投資し，追随者が遅れて投資するという「先制投資均衡（preemptive investment equilibrium）」と，投資価値が最大になるような状態で，両企業がタイミングを合わせて同時に投資するという「共同投資均衡（collaborative investment equilibrium）」の２種類がある。それぞれの均衡について，どのような条件で成立し，戦略効果とオプション効果がどのように作用するかを明らかにする。(4)産業組織論への応用（５節）。標準モデルで得られた結果を，耐久財の新製品導入競争に当てはめて議論する。また，産業動学の視点から今後の課題について述べる。

1.2　既存研究

オプション・ゲームに関する初期の研究には，Williams（1993），Dixit and Pindyck（1994），Grenadier（1996），Joaquin and Butler（1999），Grenadier（2002），Nielson（2002）がある。オプション・ゲームに，Fudenberg and Tirole（1985）により定義された閉ループ戦略を導入することで，より完全なモデルとして定式化した研究に，Huisman（2001），Huisman et al.（2004），Dias and Teixeira（2010），Mason and Weeds（2010），Chevalier-Roignantm and Trigeorgis（2011），Boyer, Lasserre and Moreaux（2012），Thijssen, Huisman and Kort（2012）がある。

本稿で扱う標準モデルでは，無限連続時間のもとで，対称的な２企業が１つの投資機会を巡り競争している。連続的に分布している状態変数の変動に不確実性があり，状態変数へのショックは両企業に共通するものである。さらに，投資は非分割性（indivisibility）を持つ（これを「lumpy investment」と言う）。近年は，上記の標準的な設定を拡張した研究が多く取り組まれており，新たな知見が生み出されている。Joaquin and Butler（1999），Pawlina and Kort（2006），Kong and Kwok（2007）では，投資費用や利潤フロー（つまりは生産費用や需要）について非対称的な企業のオプション・ゲームを考えている。また，lumpy investment に対して，無限小に分割できる投資（これを「incremental investment」

と言う）を想定して分析したものに，Williams（1993），Baldursson（1998），Grenadier（2002），Aguerrevere（2003）がある。さらに，Williams（1993），Baldursson（1998），Nielson（2002），Murto, Näsäkkäla and Keppo（2004），Boyer et al.（2004）では複数の投資機会を考え，Grenadier（2002），Murto and Keppo（2002），Bouis, Huisman and Kort（2009）はモデルを n（＞２）企業のケースへ拡張し，より複雑な分析を可能にした。離散期間でモデルを設定した研究には，Smit and Ankum（1993），Kulatilaka and Perotti（1998），Smit （2003），Smit and Trigeorgis（2004），Murto, Näsäkkäla and Keppo（2004），Smit and Trigeorgis（2006）があり，状態変数も離散の値を取る（二項（binominal）モデル）ゲームには，Smit and Ankum（1993），Smit（2003），Smit and Trigeorgis（2004），Smit and Trigeorgis（2006）がある。時間や状態変数を離散的に設定することで，シミュレーション分析が可能となる[9)]。非対称情報があるモデルには Grenadier（1999），Murto and Keppo（2002），Décamps and Mariotti（2004），不完備情報ゲームとして定式化した研究には Lambrecht（1999），Lambrecht and Perraudin（2003）がある。

具体的な投資を想定した応用研究も数多くなされている。R&D 競争や特許競争，また革新技術の採用についての研究に，Lambrecht（1999），Weed（2002），Huisman（2001），Cottrell and Sick（2002），Huisman and Kort（2002），Huisman and Kort（2004）がある。また，撤退理論に取り組んだ研究には，Murto（2004），Sparla（2004），Bayer（2007），O'Brien and Folta（2009）が挙げられる。品質の選択について論じたものが，Pawlina and Kort（2010）である。Nielson（2002），Mason and Weed（2010）は，ネットワーク外部性といった投資の外部性をモデルに取り入れて分析をしている。

このように，オプション・ゲームは様々な方向への応用研究がなされ，今後もさらなる進展が期待される。

9)　モンテカルロ法によるシミュレーション分析が主流である（Murto, Näsäkkäla and Keppo（2004））。

２．モデルの設定

無限連続時間において，投資活動をする対称的な２企業を考える。１つの投資事業を巡って，企業間で投資競争が展開されている。企業はどのタイミングで投資を実行するかを考える。どの時点で投資しても投資費用Iは一定である[10)]。また，企業は危険中立的である。初期時点で，両企業ともすでに市場で活動しており，正の利潤フローを毎時点得ている[11)]。どの企業も「拡張オプション（expansion options）」を所有しており，投資をすることで利潤フローを増加させることができる。例えば，生産能力の拡大や新製品導入などがこれに該当する。最初に投資する企業を「先導者」と，先導者が投資した後に投資する企業を「追随者」と，それぞれ呼ぶことにする。また，両企業が同時に投資する可能性も排除しない。起こりうる産業構造は３つあり，(1) どの企業も投資していない，(2) 先導者は投資をしており，追随者は投資をしていない，(3) 両企業が投資している，のいずれかである。

t 時点において，企業が得る利潤フロー$\pi(t)$は次のような形をしている。

$$\pi(t) = \theta(t)\bar{\pi}\ . \tag{1}$$

以下，右辺の２つのパラメータについて説明をする。

（1）利潤フローの不確実な要素$\theta(t)$について

$\theta(t)$は市場全体のショックであり，両企業がともに直面する共通の不確実性である[12)]。$\theta(t)$の実現値がゲームの構造を決定するので，これを「状態（state）」

10) I はオプションの行使価格であると解釈できる。

11) これを「既存市場（existing market）モデル」と呼ぶ。これに対して，どの企業もまだ市場で活動しておらず，参入のために投資を行うモデルを「新市場（new market）モデル」と呼ぶ。このときのオプションは，「投資オプション（investment options）」と呼ばれる。

12) 企業固有のショックを考えた研究に，Shackleton, Tsekrekos and Wojakowski（2004）がある。

と呼ぶことにする[13]。この不確実性を具体的に述べると，消費者の嗜好が変化することによる需要の不確実性や，あるいは為替レートや原材料価格といった，生産費用の変動に関わる不確実性などが想定できる。$\theta(t)$は確率変数であり，各時点で独立かつ同様に分布する（i.i.d.）。さらに，$\theta(t)$の確率過程は幾何ブラウン運動に従う。すなわち，微小時間 dt において，$\theta(t)$は次の式に従って変動する。

$$d\theta(t) = \mu\theta(t)dt + \sigma\theta(t)dw(t). \tag{2}$$

μ，σは定数である。μはドリフト・パラメータであり，$\theta(t)$が辿る成長トレンドの期待値を表すので，右辺第１項は長期的な変動を決める項となる[14]。σはボラティリティ・パラメータであり，成長トレンドからの乖離を表すので，右辺第２項は短期的な変動を決める項となる。$w(t)$はウィナー過程に従う確率変数で，$dw(t) \sim N(0, dt)$である。

$\theta(t)$の確率過程は，フィルター付き確率空間（$\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}$）上で定義される。フィルトレーション$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(t)\}_{t\geq 0}$（ただし，$\mathcal{F}(t) = \sigma[\theta(s)|s \leq t]$）は，$\{\theta(t)\}_{t\geq 0}$によって生成される$\sigma$–集合体の列であり，$\mathcal{F}(0) = \{\Omega, \varnothing\}$，$\mathcal{F}(t) \subseteq \mathcal{F}(t')$，$t \leq t'$という性質を持つ。$\mathcal{F}(t)$は０時点から t 時点までの$\theta(t)$の実現値を観察することで得られる情報集合で，これをもとにプレイヤーは t 時点での期待値を形成する[15]。t 時点における条件付き期待値オペレータを $\mathrm{E}_t(\cdot) = \mathrm{E}(\cdot|\mathcal{F}(t))$と書く。特に，初期時点の期待値オペレータを $\mathrm{E}(\cdot) = \mathrm{E}(\cdot|\mathcal{F}(0))$とする。

割引率を r として，次の仮定を置く。

---

13) Paxson and Pinto（2005）は 市場規模と利潤フローの２つの状態変数について不確実性があり，両変数の間に相関がある状況を考えている。

14) 企業が危険回避的であるときは，配当利回りδを用いて，μを危険中立ドリフト $r-\delta$ に置き換えればよい。危険中立ドリフトは$\mu-\rho$に等しい。ただし，ρはリスク・プレミアムである。

15) フィルトレーションの性質より，プレイヤーは明らかになっていない情報に基づいて期待値を形成することはできない。

仮定１：$r > \mu$[16)]

（2）利潤フローの確定的な要素 $\bar{\pi}$ について

$\bar{\pi}$ は時間に依存せず一定の値をとる。$\bar{\pi}$ の水準は，何社の企業が投資を実行したかによって変化する。自企業 i と他企業 j の確定的利潤フローの組を $(\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_j)$ とすると，値の組み合わせは全部で４つある。まず，どの企業も投資をしていない初期状態では，$(\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_j) = (\bar{\pi}_0, \bar{\pi}_0)$ である[17)]。自企業が投資し，他企業は投資しないときは $(\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_j) = (\bar{\pi}_L, \bar{\pi}_F)$，逆に，自企業は投資せず，他企業が投資するときは，$(\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_j) = (\bar{\pi}_F, \bar{\pi}_L)$ となる。さらに，両企業とも投資をしているときは，$(\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_j) = (\bar{\pi}_C, \bar{\pi}_C)$ となる[18)]。各利潤フローの大小関係について，次の仮定を設ける[19)]。

仮定２：$\bar{\pi}_L > \bar{\pi}_C > \bar{\pi}_0 > \bar{\pi}_F$

---

16) $r - \mu$ は便利収益率（convenience yield）あるいは不足収益率（return shortfall）と呼ばれ，オプションを保持し続けて，投資の実行を遅らせることの機会費用になる。$\theta(0) = \theta$ とすると，

$$\mathrm{E}\left(\int_0^\infty \theta(t) e^{-rt} dt\right) = \theta \int_0^\infty e^{-(r-\mu)t} dt$$

となるので，この仮定より，割引現在価値の期待値が（無限大にならず）有限値に収束する。したがって，オプションを保有し続ける機会費用が正であり，有限時間内にオプションを行使することを保証する。

17) 非対称企業の場合は，$(\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_j) = (\bar{\pi}_i^0, \bar{\pi}_j^0)$ のように表さないといけない。

18) 新市場モデルでは $\bar{\pi}_0 = \bar{\pi}_F = 0$ であり，$\bar{\pi}_L$ は独占利潤となる。

19) パラメータの置き方は，次のように一般化できる。企業 $i \in \{1, 2\}$ について，

$$N_i = \begin{cases} 0 & \text{（企業 } i \text{ は投資していない）} \\ 1 & \text{（企業 } i \text{ は投資している）} \end{cases}$$

とし，$D_{N_i N_j}$ を価値関数の形状を決定づける要因（competition factors）と定義する。利潤フローを $\pi(D_{N_i N_j})$，$\pi' > 0$ とする。このとき，仮定２は，

$$D_{10} > D_{11} > D_{00} > D_{01}$$

となる。また，両対称企業が投資していても，投資の順番によって利潤フローが変わることもある。このときは，自企業が先導者として投資したときは $D_{1_L 1_F}$，追随者として投資したときは $D_{1_F 1_L}$ と置いて D_{11} を区別する。

仮定２の各不等式について，経済学的な解釈を与える。

ｉ）$\bar{\pi}_L > \bar{\pi}_0$ について

投資を実行することにより，これまでの同質的な競争から抜け出ることができ，利潤フローは増加する。例えば，付加価値の高い新製品を市場に導入することで，以前よりも高い価格付けが可能になったり，新たな顧客を獲得したりすることができる。あるいは，生産能力を拡張することで，大量生産による低コストが実現し，低価格によって相手企業から顧客を奪い取ることができる。このようにして利潤フローが増加する。

ⅱ）$\bar{\pi}_0 > \bar{\pi}_F$ について

ｉ）とは逆の状況であり，相手企業に投資を先んじられると，これまで得ていた利潤フローは低下してしまう。

ⅲ）$\bar{\pi}_L > \bar{\pi}_C$ について

相手企業より先に投資をして高い利潤フローを得ていても，その後，相手企業が追随して投資すると再び同質競争が展開され，利潤フローは低下する。

ⅳ）$\bar{\pi}_C > \bar{\pi}_F$ について

相手企業に投資を先制されると，これまで得ていた利潤フローは低下するが，自企業も追随して投資すれば，利潤フローを増加させることができる。

ｖ）$\bar{\pi}_C > \bar{\pi}_0$ について

どの企業も投資をしていない初期状態と比べて，両企業が投資を実行した後の利潤フローは増加する。具体的な例を挙げると，両企業とも高品質製品を高価格で販売したり，あるいは両企業とも拡張した生産能力で，これまでよりも多くの供給量を達成していたりなどが考えられる。

さらに，「先手の利益（first-mover’s advantage）」を仮定する。

仮定３：$\overline{\pi}_L - \overline{\pi}_0 > \overline{\pi}_C - \overline{\pi}_F$

この式は次のような意味を持つ。どの企業も投資していない状況から，先導者として投資したときに得られる利潤フローの増分（左辺）は，追随者として投資したときに得られる利潤フローの増分（右辺）よりも大きい。

企業の戦略は，投資実行のタイミングを決定することである[20]。一度でも投資を実行すると，その企業が持っていた投資機会は消滅し，所有していたオプションは失効する[21]。

不確実性がない（$\theta(t)$の動きが確定的である）場合は，利潤の変動は予測可能であり，時間と利潤フローは完全に対応するので，投資実行の時間が戦略となる。しかし，利潤フローの変動が不確実であるときは，同じ時間であっても実現する利潤フローの値は確率的に異なるので，投資実行の時間を戦略とすることはできない。このときは，観察される状態θがある値θ^*を超えたときには直ちに投資を実行し，それ以下の値であるならば投資の実行をしばらく待つものとする。投資を実行するかどうかの限界的なθの値θ^*を，投資の「閾値（threshold）」と呼ぶ。したがって，戦略は投資の閾値を決定することに帰着される[22]。投資が実行される時間T^*は，$\theta(t)$が最初にθ^*に到達する時間であり，$T^* = \inf\{t|\ \theta(t) \geq \theta^*\}$[23]となる。$\theta^*$は確定した値であるが，$\theta(t)$は確率変数であるため，$T^*$も確率変数となる。それゆえ，$T^*$を直接決めることは不可能となるのである。

---

20) プレイヤーがどの時点で行動に移すかを決めるゲームを，「タイミング・ゲーム」という。その中で，最適停止（optimal stopping）ゲームとは，停止する時間を決めるゲームである。t時点までにまだ停止していないときの行動集合は，$A_i(t) = \{$停止(1), 継続(0)$\}$，t時点までに停止したときの行動集合は，$A_i(t) = \{\varnothing\}$となる。オプション・ゲームの場合は，オプションを行使することが「停止」に，オプションを保持し続けることが「継続」に相当する。閾値θ^*について，$\theta \in [0, \theta^*)$は継続領域，$\theta \in [\theta^*, \infty)$は停止領域となる。タイミング・ゲームを詳細に扱ったテキストに，Fundenberg and Tirole（1991）がある。

21) オプションを行使した企業のみならず，行使しなかった企業のオプションもすべて消滅することもある（Murto and Keppo（2002））。また，オプションを獲得する時期が不確実なこともある（Huisman and Kort（2004））。

22) 戦略をマルコフ戦略（現在の状態のみに依存する戦略）に限定することが前提である。

23) inf を取るのは，$\theta(t)$がちょうどθ^*の値と等しくならず，飛び越すこともあり，このときも投資を実行するからである。

３．価値関数の導出

価値関数とは，現在の状態がθであるときに，それ以降の時間に当該企業が獲得できる利潤フローの割引純現在価値を期待値で評価したものである。この価値関数には，現時点以降で得る利潤フローのみならず，将来のある時点で当該企業が投資したときの期待価値（＝オプション価値）も含まれている。また，先導者として投資するとき，もしくは追随者として投資するとき，あるいは両企業が同時に投資するときと，それぞれの状況によって価値関数が異なる。企業はこれらの価値を比較して，投資の意思決定を行う。価値関数を導出する方法は，微分法アプローチと積分法アプローチの２つがあり，どちらの方法を用いても価値関数と閾値は同じである。以下では，この事実を確認するために，２つの方法により価値関数を導出する。3.1 節は微分法アプローチで，3.2 節は積分法アプローチでそれぞれ検討する。

逆向きの推論により，いずれのアプローチでもまず追随者の価値関数を考えて，価値を最大にする最適な閾値を求める。次に，この閾値を所与として，先導者の価値関数を考える。この価値関数をもとにして，先導者として投資するかどうかを決める。同時投資の価値関数は，相手企業も同じタイミングで投資するという前提のもとで導き出される。

3.1　微分法アプローチ

このアプローチでは，ベルマン方程式を構築することから始まる。ベルマン方程式に伊藤の補題を適用して，価値関数に関する微分方程式を導き出す。２つの境界条件，すなわち，value-matching 条件と smooth-pasting 条件を考慮に入れて，この方程式を解くことで，価値関数と閾値が導かれる。

3.1.1　追随者の価値

投資費用は一定であり，利潤フローは$\theta(t)$の確率過程のみに依存する。したがって，追随者の価値関数は現在の状態θで決定され，時間には依存しないので，$F(\theta)$と表すことができる。相手企業はすでに投資をしており，投資機会を

持つ企業は追随者しかいないので,オプションを占有しているのと同じである。つまり，独占企業と同じように，オプション価値が最大になるよう投資を実行する[24)]。追随者の閾値をθ_Fとする。θがθ_Fより大きいか小さいかで，価値関数の形状が変わる。

ｉ）$\theta < \theta_F$のとき，追随者は投資の実行をしばらく待つ。現在の状態θと，微小時間 dt が経過した後の状態$\theta + d\theta$についてベルマン方程式を立てると，次のようになる。

$$rF(\theta)dt = \theta\pi_F dt + \mathrm{E}(dF)\,. \tag{3}$$

ただし，$\mathrm{E}(dF) = \mathrm{E}F(\theta + d\theta) - F(\theta)$である。このベルマン方程式は，次のように解釈すると直感的にも分かりやすい。F という資産の所有者は，dt 時間にインカム・ゲイン $\theta\pi_F dt$ とキャピタル・ゲイン $\mathrm{E}(dF)$を得る。この２つの収益の和が右辺である。一方，左辺は dt 時間における F の収益率が r であることを示している。ベルマン方程式はこの２つが一致することを意味する。伊藤の補題より，

$$F(\theta + d\theta) = F(\theta) + F'(\theta)d\theta + \frac{1}{2}F''(\theta)(d\theta)^2\,. \tag{4}$$

(2)式を代入して期待値を取る。$\mathrm{E}(dw) = 0$，$\mathrm{E}((dw)^2) = dt$ であり，dt のオーダー以上の誤差を無視すると，次のようになる。

$$\mathrm{E}(dF) = \mu F'(\theta)dt + \frac{1}{2}\sigma^2 F''(\theta)dt\,. \tag{5}$$

これを(3)式に代入することで，F に関する非同次微分方程式を得て，次式で表される。

---

24) 市場の状態が好転するまで投資実行を延期するという柔軟性を維持できることや，投資収益に関する情報を十分に得るといった，オプション価値を享受できることが「後手の利益（second-mover's advantage）」となる（Cottrell and Sick（2002））。

$$\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2F''(\theta)+\mu\theta F'(\theta)-rF(\theta)+\theta\pi_F=0\,. \tag{6}$$

これを解くと，

$$F(\theta)=A_F\theta^{\beta_1}+B_F\theta^{\beta_2}+\frac{\theta\overline{\pi}_F}{r-\mu}\,. \tag{7}$$

ただし，

$$\beta_1=\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}+\sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{\sigma^2}}>1, \tag{8}$$

$$\beta_2=\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}-\sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{\sigma^2}}<0\,. \tag{9}$$

また A_F，B_F は定数である。(7)式右辺の２つの項はオプション価値，３項目は永久に利潤フロー $\theta(t)\overline{\pi}_F$ を得るときの価値（永久年金（perpetuity））である。$\theta\to 0$ のとき $F(\theta)\to 0$ となると想定できるので，$\beta_2<0$ より $B_F=0$ でないといけない。これより，

$$F(\theta)=A_F\theta^{\beta_1}+\frac{\theta\overline{\pi}_F}{r-\mu}\,. \tag{10}$$

ⅱ）$\theta\geq\theta_F$ のとき，追随者は投資費用 I を負担して直ちに投資を行う。投資費用を除いた粗価値を $V_F(\theta)$とすると，ベルマン方程式は次のようになる。

$$rV_F(\theta)dt=\theta\overline{\pi}_C dt+\mathrm{E}(dV_F)\,. \tag{11}$$

ⅰ）と同様の議論により，

$$V_F(\theta)=C_F\theta^{\beta_1}+D_F\theta^{\beta_2}+\frac{\theta\overline{\pi}_C}{r-\mu}\,. \tag{12}$$

C_F，D_F は定数である。追随者にはさらなる投資機会はなく，また追随して投資されることもないため，オプション価値は存在しない。したがって，利潤フロー $\theta(t)\overline{\pi}_F$ を永久に得るだけである。つまり，$C_F=D_F=0$ であり，追随者の粗価値は，

$$V_F(\theta) = \frac{\theta\overline{\pi}_C}{r-\mu} \tag{13}$$

となり，純価値は次のようになる。

$$F(\theta) = \frac{\theta\overline{\pi}_C}{r-\mu} - I\ . \tag{14}$$

以上ｉ）ⅱ）で求めた結果をまとめると，追随者の価値関数は以下のようになる。

$$F(\theta) = \begin{cases} A_F\theta^{\beta_1} + \dfrac{\theta\overline{\pi}_F}{r-\mu} & （\theta < \theta_F のとき） \quad (15) \\ \dfrac{\theta\overline{\pi}_C}{r-\mu} - I & （\theta \geq \theta_F のとき）. \quad (16) \end{cases}$$

次に, $\theta = \theta_F$ における２つの境界条件 value-matching 条件, および smooth-pasting 条件を適用して，定数 A_F と閾値 θ_F を求める。

value-matching 条件： $$A_F{\theta_F}^{\beta_1} + \frac{\theta_F\overline{\pi}_F}{r-\mu} = \frac{\theta_F\overline{\pi}_C}{r-\mu} - I\ , \tag{17}$$

smooth-pasting 条件： $$\left.\frac{d\left(A_F\theta^{\beta_1} + \dfrac{\theta\overline{\pi}_F}{r-\mu}\right)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_F} = \left.\frac{d\left(\dfrac{\theta\overline{\pi}_C}{r-\mu} - I\right)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_F}\ . \tag{18}$$

value-matching 条件は, $\theta = \theta_F$ で(15)式の値と(16)式の値が一致することを意味する。さらに，値のみならず，(15)式と(16)式の両曲線が $\theta = \theta_F$ で接している。これが smooth-pasting 条件である。(17)式と(18)式より,

$$A_F = \frac{1}{{\theta_F}^{\beta_1}}\left\{\frac{\theta_F(\overline{\pi}_C - \overline{\pi}_F)}{r-\mu} - I\right\}, \tag{19}$$

$$\theta_F = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\frac{r-\mu}{\overline{\pi}_C - \overline{\pi}_F}I\ . \tag{20}$$

これにより追随者の閾値が求まった。仮定２より $\theta_F > 0$ であることが保証される。

(19)式を(15)式に代入すると，次のようになる。

$$F(\theta)=\frac{\theta\bar{\pi}_F}{r-\mu}+\left\{\frac{\theta_F(\bar{\pi}_C-\bar{\pi}_F)}{r-\mu}-I\right\}\left(\frac{\theta}{\theta_F}\right)^{\beta_1}\quad(\theta<\theta_F\text{のとき}). \tag{21}$$

投資をしないとき，追随者は永久に利潤フロー $\theta(t)\bar{\pi}_F$ を得る（右辺第１項）が，利潤フローを $\theta(t)\bar{\pi}_F$ から $\theta(t)\bar{\pi}_C$ へと交換する投資機会を持っており，そのオプション価値が右辺第２項によって与えられる。

3.1.2　先導者の価値

現在の状態がθのときに，直ちに投資して先導者となる価値関数を $L(\theta)$とする[25)]。これは，相手企業を先制して投資することに成功したときの価値である。先導者が得る利潤フローは，先導者が投資したときに追随者がすぐに投資するかどうかによって変化する。つまり，次の２つのケースに分けて考える。

ⅰ）$\theta<\theta_F$のとき，追随者はまだ投資していないので，先導者の利潤フローは $\theta(t)\bar{\pi}_L$ である。粗価値 V_L に関するベルマン方程式は次のようになる。

$$rV_L(\theta)dt=\theta\bar{\pi}_L dt+\mathrm{E}(dV_L). \tag{22}$$

追随者のときと同様の計算することで，以下のような純価値が導かれる。

$$L(\theta)=A_L\theta^{\beta_1}+\frac{\theta\bar{\pi}_L}{r-\mu}-I. \tag{23}$$

ただし，A_L は定数である。

---

25) 先導者の価値関数に先導者の閾値が入らないのは，それが先導者の価値関数だけではなく，追随者の価値関数によっても決定される値であることによる。つまり，先制投資に成功したということは，相手企業（＝追随者）の閾値よりも低い値の閾値で投資したことを意味するので，追随者の価値関数も先導者の閾値を決めるために必要な情報となる。後の節で詳細に検討するように，（閉ループ戦略における）先導者の閾値は，両企業の投資強度α_i，α_jによって決定され，（閉ループ）均衡では先導者と追随者の価値が一致する閾値（先制閾値）θ_Pが先導者の閾値となる。一方，$F(\theta)$は相手企業の先制投資を許したときの価値であり，先導者が投資している限り，どのタイミングで投資しても追随者となるので，追随者の価値関数だけを考慮に入れて追随者の閾値が決定される。

ⅱ）$\theta \geq \theta_F$ のとき，先導者が投資すると同時に追随者も投資するので，先導者の利潤フローは永久に $\theta(t)\overline{\pi}_C$ となる。つまり，

$$L(\theta)=\frac{\theta\overline{\pi}_C}{r-\mu}-I\,. \tag{24}$$

以上をまとめると，先導者の価値関数は，

$$L(\theta)=\begin{cases} A_L\theta^{\beta_1}+\dfrac{\theta\overline{\pi}_L}{r-\mu}-I & (\theta\leq\theta_F\text{のとき}) \quad (25)\\ \dfrac{\theta\overline{\pi}_C}{r-\mu}-I & (\theta>\theta_F\text{のとき}) \quad (26)\end{cases}$$

となる。次に，$\theta=\theta_F$ における value-matching 条件を適用して，定数 A_L を求める[26)]。

$$\text{value-matching 条件：}\ A_L{\theta_F}^{\beta_1}+\frac{\theta_F\overline{\pi}_L}{r-\mu}-I=\frac{\theta_F\overline{\pi}_C}{r-\mu}-I\,. \tag{27}$$

(27)式より，

$$A_L=\frac{{\theta_F}^{1-\beta_1}(\overline{\pi}_C-\overline{\pi}_L)}{r-\mu}<0\,. \tag{28}$$

(25)式は，

$$L(\theta)=\frac{\theta\overline{\pi}_L}{r-\mu}-I-\frac{\theta_F(\overline{\pi}_L-\overline{\pi}_C)}{r-\mu}\left(\frac{\theta}{\theta_F}\right)^{\beta_1}\quad(\theta\leq\theta_F\text{のとき})\,. \tag{29}$$

先導者として投資することで，毎時間利潤フロー $\theta(t)\overline{\pi}_L$ を得る。しかし，将来時点に追随者が投資すると，先導者が得る利潤フローは $\theta(t)(\overline{\pi}_L-\overline{\pi}_C)$ だけ低下する。右辺第３項は，追随者の投資によって先導者価値が侵食されること（競争による価値の侵食（competitive erosion））を示す項である。すなわち，追随者

26) $\theta=\theta_F$ における smooth-pasting 条件は必要としない。θ_F は $F(\theta)$によって定まる値であり，$L(\theta)$の条件とは関係がないからである。したがって，$\theta=\theta_F$ において $L(\theta)$の 2 曲線は連続となるが，接線の傾きは一致しない。言い換えると，θ_F を境に，先導者の限界価値が大幅に変化するのである（図 1，図 2，図 3 参照）。

のオプション行使によって引き起こされる負の外部性である[27)]。

3.1.3　同時投資の価値

状態θで両企業が同時に投資するときの価値を$M(\theta)$とする。両企業が投資することで，これ以降は新たな投資機会も，また他企業による追随的な投資もないので，両企業とも利潤フロー$\theta(t)\overline{\pi}_C$を永遠に得るだけとなる。したがって，

$$M(\theta)=\frac{\theta\overline{\pi}_C}{r-\mu}-I \tag{30}$$

となる。

一方，両企業とも投資の実行をしばらく見合わせて，投資価値を最大化するような状態θ_Cに到達してから，タイミングを合わせて投資するという状況を考える。これを「共同投資」と呼ぶことにする。将来時点で共同投資を行うとき，現在の状態θにおいて期待される価値関数を$C(\theta)$で表す。

ⅰ）$\theta<\theta_C$のとき，両企業とも投資を行わないように協調している状態である。ベルマン方程式は，

$$rC(\theta)dt=\theta\overline{\pi}_0 dt+\mathrm{E}(dC) \tag{31}$$

となり，これまでと同様の議論により，A_Cを定数として，

$$C(\theta)=A_C\theta^{\beta_1}+\frac{\theta\overline{\pi}_0}{r-\mu}. \tag{32}$$

ⅱ）$\theta\geq\theta_C$のとき，両企業とも直ちに投資を行うので，$M(\theta)$と同じ価値となる。つまり，

$$C(\theta)=\frac{\theta\overline{\pi}_C}{r-\mu}-I. \tag{33}$$

---

27) ネットワーク外部性があるときは，$\overline{\pi}_C>\overline{\pi}_L$となり，追随者のオプション行使が先導者価値を上昇させる（Nielson（2002），Mason and Weed（2010））。

ｉ）ⅱ）より，

$$C(\theta)=\begin{cases} A_C\theta^{\beta_1}+\dfrac{\theta\overline{\pi}_0}{r-\mu} & （\theta<\theta_C のとき） \quad (34) \\ \dfrac{\theta\overline{\pi}_C}{r-\mu}-I & （\theta\geq\theta_C のとき）. \quad (35) \end{cases}$$

$\theta=\theta_C$における２つの境界条件は，

value-matching 条件： $A_C{\theta_C}^{\beta_1}+\dfrac{\theta_C\overline{\pi}_0}{r-\mu}=\dfrac{\theta_C\overline{\pi}_C}{r-\mu}-I$,　(36)

smooth-pasting 条件： $\left.\dfrac{d\left(A_C\theta^{\beta_1}+\dfrac{\theta\overline{\pi}_0}{r-\mu}\right)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_C}=\left.\dfrac{d\left(\dfrac{\theta\overline{\pi}_C}{r-\mu}-I\right)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_C}$.　(37)

これより，

$$A_C=\frac{1}{{\theta_C}^{\beta_1}}\left\{\frac{\theta_C(\overline{\pi}_C-\overline{\pi}_0)}{r-\mu}-I\right\}, \quad (38)$$

$$\theta_C=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\frac{r-\mu}{\overline{\pi}_C-\overline{\pi}_0}I. \quad (39)$$

仮定２より，$\theta_C>\theta_F>0$であることが分かる。(34)式は次のように書き換えられる。

$$C(\theta)=\frac{\theta\overline{\pi}_0}{r-\mu}+\left\{\frac{\theta_C(\overline{\pi}_C-\overline{\pi}_0)}{r-\mu}-I\right\}\left(\frac{\theta}{\theta_C}\right)^{\beta_1} \quad （\theta<\theta_C のとき）. \quad (40)$$

右辺第２項は，利潤フロー$\theta(t)\overline{\pi}_0$を$\theta(t)\overline{\pi}_C$に交換する投資が持つオプション価値である。

3.2　積分法アプローチ

このアプローチでは，利潤フローの割引純現在価値の期待値を，無限時間に渡って計算することから出発する。その際，期待割引因子，および割引現在価値の期待値を，現在の状態θと閾値θ^*の関数で表す公式を適用し，価値関数をθとθ^*のみの関数とする。これをθ^*について最大化して，閾値の具体的な値を

求める。動的計画法を用いる微分法アプローチとは違い，静学的最適化の手法を用いるだけで議論は完結するので，簡便な手法と言える。ただし，「期待割引因子の公式」と「割引現在価値の期待値の公式」（以降「２つの公式」と呼ぶ）が既知であることが前提となる。以下では，この２つの公式を導出する。

3.2.1　期待割引因子の公式

$\theta(t) = \theta\,(< \theta^*)$ が θ^* に初めて到達する時間（初通過時間（first-hitting time））を T^* とする。T^* は確率変数であり，θ と θ^* によってその値が定まるため，期待割引因子を θ と θ^* の関数と見ることができる。そこで，期待割引因子を $B(\theta;\theta^*) = \mathrm{E}(e^{-rT^*})$ とおく。いま，微小時間 dt の間に状態が $\theta + d\theta$ へと変化した。dt は確定的な変数であるので，次の関係式が成り立つ。

$$B(\theta;\,\theta^*) = B(\theta;\theta + d\theta) \times \mathrm{E}_t B(\theta + d\theta;\theta^*) \tag{41}$$

$$= e^{-rdt}\mathrm{E}_t B(\theta + d\theta;\,\theta^*). \tag{42}$$

伊藤の補題より，

$$B(\theta + d\theta;\theta^*) = B(\theta;\theta^*) + \mu B'(\theta;\theta^*)d\theta + \frac{1}{2}B''(\theta;\theta^*)(d\theta)^2. \tag{43}$$

(2)式を代入して期待値を取る。

$$\mathrm{E}_t B(\theta + d\theta;\theta^*) = B(\theta;\theta^*) + \mu\theta B'(\theta;\theta^*)dt + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 B''(\theta;\theta^*)dt. \tag{44}$$

これを(42)式に代入し，$e^{-rdt} = 1 - rdt$ と近似すると，

$$B(\theta;\theta^*) = (1 - rdt)\left\{B(\theta;\theta^*) + \mu\theta B'(\theta;\theta^*)dt + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 B''(\theta;\theta^*)dt\right\}. \tag{45}$$

右辺を展開して整理し，dt で割った上で $dt \to 0$ とすると次式を得る。

$$\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 B''(\theta;\theta^*) + \mu\theta B'(\theta;\theta^*) - rB(\theta;\theta^*) = 0. \tag{46}$$

これは，関数 B の同次２階微分方程式である。これを解くと，

$$B(\theta;\theta^*) = A_B\theta^{\beta_1} + B_B\theta^{\beta_2}. \tag{47}$$

β_1，β_2 はそれぞれ(8)式，(9)式で定義される。ここで，A_B，B_B は定数であり，以

下に掲げる２つの境界条件より値が定まる。

（1）$\theta \to \theta^*$のとき $T^* \to 0$ なので，$\mathrm{E}(e^{-rT^*}) \to 1$ である。つまり，

$$B(\theta^*;\theta^*) = A_B\theta^{*\beta_1} + B_B\theta^{*\beta_2} = 1. \tag{48}$$

（2）$\theta \to 0$ のとき，$\theta(t)$がθ^*に到達する確率は極めて小さくなるので，$T^* \to \infty$ となる。したがって，$\mathrm{E}(e^{-rT^*}) \to 0$ である。つまり，$B(0;\theta^*) = 0$ で，これが成立するためには$\beta_2 < 0$ より $B_B = 0$ となる必要がある。(48)式より，

$$A_B = \frac{1}{\theta^{*\beta_1}}. \tag{49}$$

以上より，

$$B(\theta;\theta^*) = \mathrm{E}(e^{-rT^*}) = \left(\frac{\theta}{\theta^*}\right)^{\beta_1}. \tag{50}$$

これが「期待割引因子の公式」である。

3.2.2　割引現在価値の期待値の公式

$\theta(t)$の０時点から T^*時点までの割引現在価値の期待値

$$G(\theta) = \mathrm{E}\left(\int_0^{T^*} \theta(t)e^{-rt}dt\right) \tag{51}$$

を考える。ただし，$\theta(0) = \theta$である。G に関するベルマン方程式は，

$$rG(\theta)dt = \theta dt + \mathrm{E}(dG). \tag{52}$$

ゆえに，次のような微分方程式が導かれる。

$$\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 G''(\theta) + \mu\theta G'(\theta) - rG(\theta) + \theta = 0 \quad . \tag{53}$$

一般解は，

$$G(\theta) = A_G\theta^{\beta_1} + B_G\theta^{\beta_2} + \frac{\theta}{r-\mu}. \tag{54}$$

定数 A_G，B_G は，以下の２つの境界条件によって定まる。

（1）$\theta \to \theta^*$のとき $T^* \to 0$ なので $G(\theta^*) = 0$。
（2）$\theta \to 0$ のとき，$B_G = 0$ でないと $G(0)$の値は収束しない。
これより，

$$A_G = -\frac{\theta^{*1-\beta_1}}{r-\mu}. \tag{55}$$

したがって，

$$G(\theta) = \mathrm{E}\left(\int_0^{T^*} \theta(t) e^{-rt} dt\right) = \frac{\theta}{r-\mu} - \frac{\theta^*}{r-\mu}\left(\frac{\theta}{\theta^*}\right)^{\beta_1}. \tag{56}$$

これが「割引現在価値の期待値の公式」である。特に，$\theta^* = \infty$とすると $T^* = \infty$ なので，

$$\mathrm{E}\left(\int_0^{\infty} \theta(t) e^{-rt} dt\right) = \frac{\theta}{r-\mu}. \tag{57}$$

3.2.3　追随者の価値

追随者の閾値をθ^*，初通過時間を T^*とする。現時点を 0 時点と基準化し，$\theta(0) = \theta$とする。したがって，T^*は状態θに到達してからの経過時間を表す。
ｉ）$\theta < \theta^*$のとき，追随者の価値関数は次のようになる。

$$F(\theta) = \mathrm{E}\left(\int_0^{T^*} \theta(t)\bar{\pi}_F e^{-rt} dt + \int_{T^*}^{\infty} \theta(t)\bar{\pi}_C e^{-rt} dt - e^{-rT^*} I\right). \tag{58}$$

ここで，

$$F(\theta) = \bar{\pi}_C \mathrm{E}\left(\int_0^{\infty} \theta(t) e^{-rt} dt\right) + (\bar{\pi}_F - \bar{\pi}_C)\mathrm{E}\left(\int_0^{T^*} \theta(t) e^{-rt} dt\right) - I\mathrm{E}(e^{-rT^*}) \tag{59}$$

と変形できるので，２つの公式を当てはめると，

$$F(\theta) = \frac{\theta\bar{\pi}_F}{r-\mu} + \left\{\frac{\theta^*(\bar{\pi}_C - \bar{\pi}_F)}{r-\mu} - I\right\}\left(\frac{\theta}{\theta^*}\right)^{\beta_1}. \tag{60}$$

ⅱ）$\theta \geq \theta^*$のとき，追随者は直ちに投資をするので，価値関数は次のようなる。

$$F(\theta) = \mathrm{E}\left(\int_0^{\infty} \theta(t)\bar{\pi}_C e^{-rt} dt - I\right). \tag{61}$$

割引現在価値の期待値の公式より，

$$F(\theta)=\frac{\theta\overline{\pi}_C}{r-\mu}-I\,. \tag{62}$$

以上をまとめると，

$$F(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta\overline{\pi}_F}{r-\mu}+\left\{\dfrac{\theta^*(\overline{\pi}_C-\overline{\pi}_F)}{r-\mu}-I\right\}\left(\dfrac{\theta}{\theta^*}\right)^{\beta_1} & （\theta<\theta^*のとき） \quad (63)\\[2ex] \dfrac{\theta\overline{\pi}_C}{r-\mu}-I & （\theta\geq\theta^*のとき）. \quad (64)\end{cases}$$

追随者の閾値θ_Fは，$F(\theta)$をθ^*について最大化したものである。つまり，

$$\theta_F=\arg\underset{\theta^*}{\mathrm{Max}}\,F(\theta)\,. \tag{65}$$

したがって，

$$\theta_F=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\frac{r-\mu}{\overline{\pi}_C-\overline{\pi}_F}I\,. \tag{66}$$

これより，閾値は微分法アプローチで得られた値と同じになることが分かる。さらに，$\theta^*=\theta_F$としたときの価値関数(63)式もまた，微分法アプローチで導かれた価値関数(21)式と一致する。

3.2.4　先導者の価値

ⅰ）$\theta<\theta_F$のとき，先導者の価値関数は次のようになる。ただし$T_F=\inf\{t|\ \theta(t)\geq\theta_F\}$である。

$$L(\theta)=\mathrm{E}\left(\int_0^{T_F}\theta(t)\overline{\pi}_L e^{-rt}dt+\int_{T_F}^{\infty}\theta(t)\overline{\pi}_C e^{-rt}dt-I\right). \tag{67}$$

$$=\frac{\theta\overline{\pi}_L}{r-\mu}-I-\frac{\theta_F(\overline{\pi}_L-\overline{\pi}_C)}{r-\mu}\left(\frac{\theta}{\theta_F}\right)^{\beta_1}. \tag{68}$$

ⅱ）$\theta\geq\theta_F$のとき，追随者は先導者と同じタイミングで投資をするので，価値関数は次のようなる。

$$L(\theta) = \mathrm{E}\left(\int_0^\infty \theta(t)\overline{\pi}_C e^{-rt} dt - I \right) \tag{69}$$

$$= \frac{\theta \overline{\pi}_C}{r-\mu} - I \,. \tag{70}$$

これより,

$$L(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta \overline{\pi}_L}{r-\mu} - I - \dfrac{\theta_F (\overline{\pi}_L - \overline{\pi}_C)}{r-\mu} \left(\dfrac{\theta}{\theta_F} \right)^{\beta_1} & (\theta < \theta_F \text{ のとき}) \quad (71) \\ \dfrac{\theta \overline{\pi}_C}{r-\mu} - I & (\theta \geq \theta_F \text{ のとき}). \quad (72) \end{cases}$$

これは，微分法アプローチで求めた価値関数と同じである。

3.2.5　同時投資の価値

状態θで両企業が同時に投資するとき，その価値関数は,

$$M(\theta) = \mathrm{E}\left(\int_0^\infty \theta(t)\overline{\pi}_C e^{-rt} dt - I \right) \tag{73}$$

$$= \frac{\theta \overline{\pi}_C}{r-\mu} - I \,. \tag{74}$$

一方，投資閾値θ^{**}で共同投資をするときの価値関数$C(\theta)$を考える。初通過時間をT^{**}とする。

ｉ）$\theta < \theta^{**}$のとき，価値関数は次のようになる。

$$C(\theta) = \mathrm{E}\left(\int_0^{T^{**}} \theta(t)\overline{\pi}_0 e^{-rt} dt + \int_{T^{**}}^\infty \theta(t)\overline{\pi}_C e^{-rt} dt - e^{-rT^{**}} I \right) \tag{75}$$

$$= \frac{\theta \overline{\pi}_0}{r-\mu} + \left\{ \frac{\theta^{**}(\overline{\pi}_C - \overline{\pi}_0)}{r-\mu} - I \right\} \left(\frac{\theta}{\theta^{**}} \right)^{\beta_1} . \tag{76}$$

ⅱ）$\theta \geq \theta^{**}$のとき，両企業とも直ちに投資をするので,

$$C(\theta) = \frac{\theta \overline{\pi}_C}{r-\mu} - I = M(\theta) \,. \tag{77}$$

以上より,

$$C(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta\overline{\pi}_0}{r-\mu}+\left\{\dfrac{\theta^{**}(\overline{\pi}_C-\overline{\pi}_0)}{r-\mu}-I\right\}\left(\dfrac{\theta}{\theta^{**}}\right)^{\beta_1} & （\theta<\theta^{**}のとき）\quad(78)\\ \dfrac{\theta\overline{\pi}_C}{r-\mu}-I & （\theta\geq\theta^{**}のとき）.\quad(79)\end{cases}$$

$C(\theta)$をθ^{**}について最大化したものが，共同投資の最適な閾値θ_Cとなる。つまり，

$$\theta_C=\arg\underset{\theta^{**}}{\mathrm{Max}}\,C(\theta)\,. \tag{80}$$

これを計算すると，

$$\theta_C=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\frac{r-\mu}{\overline{\pi}_C-\overline{\pi}_0}I\,. \tag{81}$$

この閾値は，微分法アプローチで求めた値と同じである。また，$\theta^{**}=\theta_C$としたときの(78)式は，微分法アプローチより導かれた(40)式と一致する。

3.3　価値関数の形状

以上で導き出された各価値関数について，そのグラフの形状と位置関係について検討する。その準備として，新たに２つの閾値θ_P，θ_Lを定義する。まず，$\theta\in[0,\theta_F)$において，先導者価値と追随者価値が一致するようなθを求め，それを先制閾値（preemption threshold）θ_Pと命名する。すなわち，θ_Pは次のように定義される。

$$L(\theta_P)=F(\theta_P)\,.$$

また，先導者はゲームが始まる前に投資計画を立てることができ，０時点から始まる先導者価値を最大化するように閾値を決めるものとする（つまり，開ループ戦略のことである（後述））。この閾値は次のようになる（導出は次節で論じる）。

$$\theta_L=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\frac{r-\mu}{\overline{\pi}_L-\overline{\pi}_0}I\,. \tag{82}$$

これは，市場が独占状態で，オプション価値を完全に享受できるときの閾値でもある。

次に，$\theta < \theta_F$ における C と F について，投資費用 I が消去された形として表現する。(38)式，(39)式より，I を消去すると，

$$A_C = \frac{\theta_C^{1-\beta_1}}{\beta_1}\frac{\bar{\pi}_C - \bar{\pi}_0}{r-\mu} \tag{83}$$

となるので，(40)式は，

$$C(\theta) = \frac{1}{\beta_1}\frac{\theta_C(\bar{\pi}_C - \bar{\pi}_0)}{r-\mu}\left(\frac{\theta}{\theta_C}\right)^{\beta_1} + \frac{\theta\bar{\pi}_0}{r-\mu} \tag{84}$$

となる。同様にして，

$$F(\theta) = \frac{1}{\beta_1}\frac{\theta_F(\bar{\pi}_C - \bar{\pi}_F)}{r-\mu}\left(\frac{\theta}{\theta_F}\right)^{\beta_1} + \frac{\theta\bar{\pi}_F}{r-\mu}. \tag{85}$$

この式より，$\theta \in (0, \theta_F)$では $F''(\theta) > 0$，$C''(\theta) > 0$ となるので，F と C は凸関数である。これは，オプション効果によるものである[28)]。また，$L''(\theta) < 0$ となり L は凹関数である。これは，追随者の投資により価値が侵食されるという，負のオプション効果を表している。

次に，価値関数の位置関係について検討する。$\bar{\pi}_0 > \bar{\pi}_F$ より，$\theta \in (0, \theta_C)$について $C(\theta) > F(\theta)$となり，また，$\bar{\pi}_L > \bar{\pi}_C$ より，$\theta \in (0, \theta_F)$について $L(\theta) > M(\theta)$となる。$F(\theta)$と $M(\theta)$の差$\Delta_{FM}(\theta) = F(\theta) - M(\theta)$とすると，$\Delta_{FM}(0) = I$，$\Delta_{FM}(\theta_F) = 0$，$\Delta_{FM}'(\theta) < 0$ より，$\theta \in (0, \theta_F)$について $F(\theta) > M(\theta)$となる。

L と F の位置関係については，次の２つの命題を提示する。

---

28) より詳しく述べると次のようになる。θから状態が変化して$\theta + d\theta$になったときの，期待値で見た価値関数 $\mathrm{E}F(\theta + d\theta)$を考える。伊藤の補題(5)式より，

$$\mathrm{E}F(\theta + d\theta) = F(\theta) + \mu F'(\theta)dt + \frac{1}{2}\sigma^2 F''(\theta)dt.$$

いま，μ が同じ水準のままで，σ が大きくなったとする。$F''(\theta) > 0$ なので，伊藤の補題より $\mathrm{E}F(\theta + d\theta)$は増加する。つまり，不確実性が大きいほどオプション価値が大きくなることで，期待投資価値が上昇することが分かる。あるいは，F が凸関数であることから，ジェンセンの不等式より，

$$\mathrm{E}F(\theta) > F(\mathrm{E}(\theta))$$

が成立し，F は危険愛好的な性質を示す。つまり，不確実性が大きいほど積極的に投資する（Kulatilaka and Perotti（1998））。以上の議論は C についても成り立つ。

命題 1　$L(\theta_L) > F(\theta_L)$

証明　$L(\theta)$と $F(\theta)$の差を関数$\Delta_{LF}(\theta)$で定義する。つまり，

$$\Delta_{LF}(\theta) = L(\theta) - F(\theta)$$

$$= \frac{\theta(\bar{\pi}_L - \bar{\pi}_F)}{r-\mu} - I - \left(\frac{\theta_F(\bar{\pi}_L - \bar{\pi}_F)}{r-\mu} - I\right)\left(\frac{\theta}{\theta_F}\right)^{\beta_1}. \tag{86}$$

$\Delta_{LF}(\theta_L)$にθ_L, θ_Fの値を代入すると，

$$\Delta_{LF}(\theta_L) = \left\{\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\frac{\bar{\pi}_L - \bar{\pi}_F}{\bar{\pi}_L - \bar{\pi}_0} - 1 - \left(\frac{\bar{\pi}_C - \bar{\pi}_F}{\bar{\pi}_L - \bar{\pi}_0}\right)^{\beta_1}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\frac{\bar{\pi}_L - \bar{\pi}_F}{\bar{\pi}_C - \bar{\pi}_F} - 1\right)\right\} I. \tag{87}$$

ここで，

$$a = \frac{\bar{\pi}_L - \bar{\pi}_F}{\bar{\pi}_L - \bar{\pi}_0} > 1, \tag{88}$$

$$b = \frac{\bar{\pi}_C - \bar{\pi}_F}{\bar{\pi}_L - \bar{\pi}_0} < 1 \tag{89}$$

として，

$$\Delta_{LF}(a,b) \equiv \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}a - 1 - \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}ab^{\beta_1 - 1} + b^{\beta_1}\right)I \tag{90}$$

と再定義する。これより，

$$\frac{\partial\Delta_{LF}(a,b)}{\partial a} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}(1 - b^{\beta_1 - 1})I > 0, \tag{91}$$

$$\frac{\partial\Delta_{LF}(a,b)}{\partial b} = -\beta_1 b^{\beta_1 - 2}(a - b)I < 0, \tag{92}$$

$$\Delta_{LF}(1,1) = 0. \tag{93}$$

$a > 1$，$b < 1$ より，$\Delta_{LF}(a, b) > 0$，すなわち$\Delta_{LF}(\theta_L) > 0$ であるから，命題 1 が証明された。

証明終

命題２　θ_P は一意である。

証明　(86)式より，直ちに次のことが分かる。

$$\varDelta_{LF}(0) = -I < 0, \tag{94}$$

$$\varDelta_{LF}(\theta_F) = 0, \tag{95}$$

$$\varDelta_{LF}(\theta_P) = 0. \tag{96}$$

また，

$$\varDelta'_{LF}(\theta_F) = \frac{\overline{\pi}_L - \overline{\pi}_F}{r-\mu} - \frac{\beta_1}{\theta_F}\left(\frac{\theta_F(\overline{\pi}_L - \overline{\pi}_F)}{r-\mu} - I\right). \tag{97}$$

θ_F の値を代入すると，

$$\varDelta'_{LF}(\theta_F) = -(\beta_1 - 1)\frac{\overline{\pi}_L - \overline{\pi}_C}{r-\mu} < 0\,. \tag{98}$$

さらに，

$$\varDelta''_{LF}(\theta) = -\beta_1(\beta_1 - 1)\left(\frac{\theta_F(\overline{\pi}_L - \overline{\pi}_F)}{r-\mu} - I\right)\frac{\theta^{\beta_1 - 2}}{{\theta_F}^{\beta_1}} \tag{99}$$

$$= -\beta_1(\beta_1 - 1)\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\frac{\overline{\pi}_L - \overline{\pi}_F}{\overline{\pi}_C - \overline{\pi}_F} - 1\right)I\,. \tag{100}$$

$\beta_1 > 1$ および $\overline{\pi}_L > \overline{\pi}_C$ より，$\varDelta_{LF}''(\theta) \leq 0$ である。これと(94)式，(95)式，(96)式，(98)式より，θ_P は一意である。

証明終

２つの命題より，$\theta \in (\theta_P, \theta_F)$では $L(\theta) > F(\theta)$，$\theta < \theta_P$ では $F(\theta) > L(\theta)$であり，さらに$\theta_P < \theta_L$ が示される。

以上をまとめると，価値関数と閾値の性質は次のようになる。

性質１：$\theta_P < \theta_L < \theta_F < \theta_C$

性質２：$M(\theta)$はθの線形関数である。

性質３：$\theta \in (0, \theta_F)$では $L(\theta)$は凹関数，$F(\theta)$は凸関数となる。

性質４：$\theta \geq \theta_F$ では $L(\theta)$と $F(\theta)$は線形関数となり，$L(\theta) = F(\theta) = M(\theta)$である。

性質５：$\theta \in (0, \theta_C)$では $C(\theta)$は凸関数となる。

性質６：$\theta \geq \theta_C$では $C(\theta)$は線形関数となり，$C(\theta) = M(\theta)$である。

性質７：$L(0) = M(0) = -I$，$F(0) = C(0) = 0$

性質８：$\theta \in (0, \theta_F)$のとき $C(\theta) > F(\theta) > M(\theta)$，$L(\theta) > M(\theta)$

性質９：$\theta \in (0, \theta_P)$のとき $F(\theta) > L(\theta)$

性質10：$\theta \in (\theta_P, \theta_F)$のとき $L(\theta) > F(\theta)$

性質11：$C(\theta_P) > L(\theta_P) = F(\theta_P)$

性質12：$C(\theta_F) > L(\theta_F) = F(\theta_F)$

性質13：$\theta \in (0, \theta_F)$における $L(\theta)$と $C(\theta)$の大小関係は，パラメータ（π, σ, μ, r）の値によって変化する。

性質 13 について，この大小関係が，２種類の閉ループ均衡（先制投資均衡と共同投資均衡）のどちらが成立するかを決める。以上で導かれた性質１～13 をもとに価値関数のグラフを描くと，図１または図２となる。性質 13 により，２つのケースに場合分けをして描いてある。

４．均　　衡

この節では，開ループ戦略と閉ループ戦略という２つの戦略の概念を導入する。さらに，両企業がこれらの戦略を採用するときのゲームの均衡，つまり開ループ均衡および閉ループ均衡を求める。

（1）開ループ戦略

どちらの企業が先導者または追随者として投資するかについて，役割が外生的に決められており，さらに，ゲームが始まる前に，０時点から始まる期待総価値が最大になるように投資計画を立てる。この計画は拘束性があり（事前コミットメント），ゲーム開始後は，先導者・追随者ともに計画に従って投資を行う。このような計画が開ループ戦略である。このことから，戦略は実現する状態のみに依存し，プレイ中に観察される相手企業の戦略を考慮に入れて決定

されない。つまり，直面する状態がいかに好転しようとも，追随者は先導者に先駆けて投資をすることはできないし，先導者は相手企業による先制投資の恐れに直面することなく，独占企業と同じ状況でオプションを行使することができる。したがって，開ループ戦略において先導者は，オプション効果を考慮に入れて，その価値が最大になるように閾値を決定する。

開ループ戦略が想定しているこのような状況は，ゲーム開始前にプレイされる同時手番の静学ゲームと同じであり，それゆえかなり制限された状況で取られる戦略となっている。このことから，開ループ戦略は，先導者にオプション価値を与えるためのベンチマークに過ぎない。

（2）閉ループ戦略

閉ループ戦略では，ゲームが実際にプレイされている中で，好きなタイミングで投資することができる。そして，それぞれの企業が実際に投資した時間によって，その企業が先導者になるか追随者になるか，あるいは同時に投資しているかが決まる。つまり，先導者・追随者はプレイの結果から内生的に決まり，また，同時投資の可能性も排除されない。企業は，先導者・追随者・同時投資の役割のうち，最も高い価値を与える役割に従って閾値を決める。これらの価値の大小関係は，現在の状態θと（予想される）相手企業の閾値によって決定される。とりわけ，先導者として投資するには，相手企業の閾値θ_jに対して，閾値を$\theta < \theta_j$と設定して，相手企業に先制して投資しないといけない。このとき得られる価値が$L(\theta)$である。一方，$\theta = \theta_j$で投資すると同時投資となり，価値は$M(\theta)$となり，それ以外で投資するときは，追随者としてθ_Fで投資することが最適となり，価値$F(\theta)$を得る。

企業は各状態から始まる部分ゲームのすべてについて，このような意思決定をするので，閉ループ戦略は均衡の完全性に対応している。そのため，開ループ戦略と比べても，連続時間ゲームの戦略として自然な概念となる。

（3）開ループ戦略と閉ループ戦略の比較

均衡における２つの戦略を比較して違いを見出すことで，戦略効果が明らか

になる。その理由を先導者について説明すると，次のようになる。開ループ戦略では，相手企業の戦略を考慮に入れずに投資決定するので，先導者の価値にはオプション効果のみが含まれており, 戦略効果は存在しない。これに対して，閉ループ戦略では，先導者として投資するために，相手企業の戦略を考慮に入れて先制投資に成功するよう戦略が決められるので，オプション効果のみならず，戦略効果も含まれている。

4.1　開ループ均衡

先導者は事前に閾値θ_Lを計画し，ゲームが実際にプレイされると，状態$\theta(t)$がθ_Lを超えたときに必ず投資を実行する。追随者の計画する閾値はθ_Fであり[29]，$\theta_F > \theta_L$となることが（外生的に）要求されている。先導者が投資する時間をT_L，追随者のそれをT_Fとすると，$\theta_L < \theta_F$より$T_L < T_F$となる。また，開ループ均衡では，$\{\theta_L, \theta_F\}$がナッシュ均衡となっていないといけない。つまり，先導者が計画した閾値θ_Lに対して，追随者が計画した閾値θ_Fは最適反応になっており，またその逆も成立している。

$\theta(t) < \theta_L$のときは，どの企業も投資をしておらず，両企業とも利潤フロー$\theta(t)\overline{\pi}_0$を得る。$\theta(t) \in [\theta_L, \theta_F)$のときは先導者のみ投資しており，先導者は利潤フロー$\theta(t)\overline{\pi}_L$を，追随者は利潤フロー$\theta(t)\overline{\pi}_F$をそれぞれ得る。$\theta(t) \geq \theta_F$では，両企業が投資しており，両企業とも利潤フロー$\theta(t)\overline{\pi}_C$を得る。これを踏まえると，先導者の価値関数は次のようになる[30]。

$$L_0(\theta) = \mathrm{E}\left(\int_0^{T_L} \theta(t)\overline{\pi}_0 e^{-rt}dt + \int_{T_L}^{T_F} \theta(t)\overline{\pi}_L e^{-rt}dt + \int_{T_F}^{\infty} \theta(t)\overline{\pi}_C e^{-rt}dt - Ie^{-rT_L}\right). \quad (101)$$

これは次のように書き換えられる。

---

29) この値は，結果的に(20)式と一致する。

30) 開ループ戦略は積分法アプローチのみ有効である。ゲーム開始前に戦略をコミットするので，状態に応じて毎時点計画を再考することが前提の動的計画法による定式は適切ではない

$$L_0(\theta)=\bar{\pi}_0\mathrm{E}\left(\int_0^{T_L}\theta(t)e^{-rt}dt\right)+\bar{\pi}_L\mathrm{E}\left(\int_0^{T_F}\theta(t)e^{-rt}dt\right)-\bar{\pi}_L\mathrm{E}\left(\int_0^{T_L}\theta(t)e^{-rt}dt\right)$$

$$+\bar{\pi}_C\mathrm{E}\left(\int_0^{\infty}\theta(t)e^{-rt}dt\right)-\bar{\pi}_C\mathrm{E}\left(\int_0^{T_F}\theta(t)e^{-rt}dt\right)-I\mathrm{E}(e^{-rT_L})\,. \qquad (102)$$

２つの公式を当てはめると，

$$L_0(\theta)=\frac{\theta\bar{\pi}_0}{r-\mu}+\left\{\frac{\theta_L(\bar{\pi}_L-\bar{\pi}_0)}{r-\mu}-I\right\}\left(\frac{\theta}{\theta_L}\right)^{\beta_1}-\frac{\theta_F(\bar{\pi}_L-\bar{\pi}_C)}{r-\mu}\left(\frac{\theta}{\theta_F}\right)^{\beta_1}. \quad (103)$$

右辺第２項は投資のオプション価値，第３項は，追随者の投資が引き起こす価値の侵食（負のオプション）を示す。

θ_F を所与として，$L_0(\theta)$ を θ_L について最適化すると，

$$\theta_L=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\frac{r-\mu}{\bar{\pi}_L-\bar{\pi}_0}I \qquad (104)$$

となり[31]，これが先導者のオプション価値を最大にする閾値である。

一方，追随者の価値関数は，

$$F_0(\theta)=\mathrm{E}\left(\int_0^{T_L}\theta(t)\bar{\pi}_0e^{-rt}dt+\int_{T_L}^{T_F}\theta(t)\bar{\pi}_Fe^{-rt}dt+\int_{T_F}^{\infty}\theta(t)\bar{\pi}_Ce^{-rt}dt-Ie^{-rT_F}\right) \quad (105)$$

$$=\frac{\theta\bar{\pi}_0}{r-\mu}-\frac{\theta_L(\bar{\pi}_0-\bar{\pi}_F)}{r-\mu}\left(\frac{\theta}{\theta_L}\right)^{\beta_1}+\left\{\frac{\theta_F(\bar{\pi}_C-\bar{\pi}_F)}{r-\mu}-I\right\}\left(\frac{\theta}{\theta_F}\right)^{\beta_1}. \quad (106)$$

θ_L を所与として，$F_0(\theta)$ を θ_F について最適化すると，

$$\theta_F=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\frac{r-\mu}{\bar{\pi}_C-\bar{\pi}_F}I\,. \qquad (107)$$

仮定３より，確かに $\theta_F>\theta_L$ となる。

・開ループ均衡

先導者は閾値 θ_L で投資し，追随者は閾値 θ_F で投資する[32]。

---

31) 通常の同時手番ゲームとは違い，最適な θ_L の条件は θ_F に依存しない。これは，$\theta_L<\theta_F$ の制約により，追随者の閾値を考慮に入れずに投資を決定するからである。

32) 別の開ループ均衡として，両企業が同時投資を事前コミットする可能性（共謀の解）もあるが，ここでは考えない。

4.2　閉ループ均衡

4.2.1　閉ループ戦略

閉ループ戦略における先導者の閾値は，先導者の価値関数だけで決まることはない。なぜならば，両企業とも先導者として投資するインセンティブを持つものの，同時に投資すると両企業とも価値が低下してしまうとき，つまり$\theta \in (\theta_P, \theta_F)$のとき（性質８，10），どちらの企業が先導者として投資するかという問題（＝コーディネーションの問題）は，先導者価値だけでは決められないからである[33)]。そこで，連続時間のタイミング・ゲームを定式化した Fudenberg and Tirole（1985）によって提唱された continuation 戦略をオプション・ゲームに導入することで，この問題を解決する。つまり，コーディネーションの問題が生じるときには，両企業が混合戦略を採用することで，先導者となる確率を内生的に決めるのである。また，同時投資をしてしまう可能性も均衡から排除せず，その発生確率を導く。

企業 i の continuation 戦略$(G_i(\theta), \alpha_i(\theta))$を考える[34)]。$G_i(\theta)$は，相手企業がまだ投資していないという条件の下で，状態θに達するまでに企業 i が投資する確率であり，これまで取られた戦略の履歴を反映したものとなる。α_i は「投資強度（intensity）」と呼ばれ，状態θで企業 i が投資する確率で，瞬時的な戦略（θ

---

33) 初期のオプション・ゲームの研究（Dixit and Pindyck（1994），Grenadier（1996），Joaquin and Butler（1999），Nielson（2002））では，コーディネーションの問題が生じるとき，（コインを投げて決める等）外生的に先導者が決められていた。

34) いま，期間の長さΔの離散期間ゲームを考える。$G_i(\theta)$は離散ゲームの混合戦略であり，$G_i \in [0, 1]$，$G_i' \geq 0$，$\lim_{\vartheta \to \theta+0} G_i(\vartheta) = G_i(\theta)$（つまり右側連続）という性質を満たす。連続時間ゲームの均衡はΔを限りなく小さくした離散期間ゲームの均衡の極限として表すことができる。しかし，連続時間ゲームにおいて，戦略空間を G_i のみに限定することで，離散期間ゲームと比べて情報のロスが出てきてしまう。また，任意の状態から始まる部分ゲームにおいて，各企業がどのようなプレイを取るかを明らかにすることができない。例えば，均衡において $G_i(\theta^*) = 1$ となっているとする。もし逸脱が発生したならば，状態$\theta^* + \varepsilon$ではどの企業も投資していないことになるが，その状態から始まる部分ゲームにおいて，どのようなプレイが取られるかは，G_iだけでは分からない。したがって，あらゆる部分ゲームについて各企業の戦略が最適になっているという，均衡の完全性を示すことができなくなる。 そこで，情報のロスを補完し，完全性の問題に対処するために，α_i を導入して戦略空間を拡張する。$\alpha_i(\cdot) \in [0, 1]$は atom 関数であり，$\alpha_i(\theta) = G_i(\theta) - \lim_{\vartheta \to \theta-0} G(\vartheta)$（$\theta$で G_iがジャンプする規模）。

での混合戦略）を表す。また，$G_i(\cdot)$は累積分布関数，$\alpha_i(\cdot)$は確率密度関数の関係にある。$\alpha_i(\theta) > 0$ であるならば，企業 i は状態θで確実に投資をするので，$G_i(\theta) = 1$ となる。

閉ループ戦略$\{(G_i(\theta),\ \alpha_i(\theta))\}_{\theta \geq 0}$は，continuation 戦略の集合であり，状態θから始まる部分ゲームで取るべき continuation 戦略を明示する[35)]。閉ループ均衡とは，戦略が部分ゲーム完全均衡となることで，任意のθに対して$\{(G_1^*(\theta),\ \alpha_1^*(\theta)),\ (G_2^*(\theta),\ \alpha_2^*(\theta))\}$がナッシュ均衡となっていることである。つまり，$(G_j^*(\theta), \alpha_j^*(\theta))$を所与として，$(G_i^*(\theta), \alpha_i^*(\theta))$は企業$i$の価値を最大にしている。

ゲーム開始後，初めて$\alpha_1(\cdot) > 0$ あるいは$\alpha_2(\cdot) > 0$ となる状態をΘとする。つまり，$\Theta = \min\{\Theta_1, \Theta_2\}$，ただし$\Theta_i = \inf\{\theta | \alpha_i(\theta) > 0\}$。したがって，状態$\Theta$では必ずどちらかの企業が投資を実行し，$\Theta$は先導者の閾値となる。状態$\Theta$では，表１で示される同時手番ゲームがプレイされると考える。このゲームでは，両企業がランダムにプレイをしており，企業 i は確率$\alpha_i(\Theta)$で投資を実行する。両企業が投資の実行を待つときは，再度同時手番ゲームがプレイされる。次のゲームまでに経過した時間はわずかであり，状態はΘのまま維持されている。どちらかが投資を実行するまで何度も同じゲームが繰り返される。

表１：初めて$\alpha_1(\cdot) > 0$ あるいは$\alpha_2(\cdot) > 0$ となる状態Θでプレイされる同時手番ゲーム

			企業２	
			$\alpha_2(\Theta)$ 投資	$1-\alpha_2(\Theta)$ 待つ
企業１	$\alpha_1(\Theta)$	投資	$M(\Theta), M(\Theta)$	$L(\Theta), F(\Theta)$
	$1-\alpha_1(\Theta)$	待つ	$F(\Theta), L(\Theta)$	繰り返しゲーム

（企業１の利得，企業２の利得）

35) より厳密に述べると次のようになる。continuation 戦略$(G_i^\eta(\theta),\alpha_i^\eta(\theta))$（$\theta \geq \eta$）は，状態$\eta$から始まる部分ゲームにおいて，状態$\theta$に到達したときに取るべき戦略を示す。閉ループ戦略は，continuation 戦略の集合$\{(G_i^\eta(\theta),\alpha_i^\eta(\theta))\}_{\eta \geq 0}$で，任意の状態$\eta$から始まる部分ゲームに対して，取るべき戦略を示すものである。この定義から，閉ループ戦略は，均衡の完全性と合致する概念であることが分かる。さらに，continuation 戦略には，異時点間整合性（intertemporal consistency）が要求される。つまり，$\eta \leq \eta' \leq \theta$に対して，$G_i^\eta(\theta) = G_i^{\eta'}(\theta)$，$\alpha_i^\eta(\theta) = \alpha_i^{\eta'}(\theta)$が課される。したがって，continuation 戦略は部分ゲームの開始状態に依存しないので，ηを省略して$(G_i(\cdot), \alpha_i(\cdot))$と表す。

続いて，均衡におけるα_iの値を求める。同時手番ゲームをプレイしている企業 i の価値関数は，(α_i, α_j)に影響を受け，次式のようになる[36)]。

$$V_i(\alpha_i, \alpha_j) = \alpha_i\alpha_j M + \alpha_i(1-\alpha_j)L + (1-\alpha_i)\alpha_j F + (1-\alpha_i)(1-\alpha_j)V_i(\alpha_i, \alpha_j). \qquad (108)$$

これより，

$$V_i(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{\alpha_i\alpha_j M + \alpha_i(1-\alpha_j)L + (1-\alpha_i)\alpha_j F}{\alpha_i + \alpha_j - \alpha_i\alpha_j}. \qquad (109)$$

これをα_iについて最大化すると，

$$\alpha_j\{(1-\alpha_j)L - F + \alpha_j M\} = 0. \qquad (110)$$

$0 < \alpha_j < 1$ に制限するならば[37)]，均衡戦略が求まり，

$$\alpha_j = \frac{L-F}{L-M}. \qquad (111)$$

つねに$L > M$であるから（性質８），$L > F$のときに限り，$\alpha_j > 0$となる。また，$L \leq F$のとき（性質９）は$\alpha_j = 0$，$M = F$のとき（性質４）は$\alpha_j = 1$となる。

ここでは，対称企業を考えているので，均衡における両企業の戦略は一致する。そこで，$\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$とする。どちらの企業が先導者になるかは，$\alpha$によって決まる。また，投資が実行されるとき，先導者のみが投資するか，両企業が同時投資するかは確率で与えられる。まず，企業 i が先導者になるのは，今回の同時手番ゲームで先導者になるか，あるいは両企業とも投資をせず，次回以降で先導者になるかのいずれかである。したがって，企業 i が先導者になる確率 p_Lは，

$$p_L = \alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)(1-\alpha)p_L. \qquad (112)$$

これより，

36) ゲームは瞬時的に繰り返されるので，割引はしない。
37) 企業 j の混合戦略が企業 i の最適化より導かれることは，静学ゲームの場合と同じである。

$$p_L = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}. \tag{113}$$

また，企業 i が追随者になる確率は，企業 j が先導者になる確率と同じなので，p_L となる。一方，両企業が同時に投資する確率 p_M は，

$$p_M = \alpha\alpha + (1-\alpha)(1-\alpha)p_M \tag{114}$$

で与えられる。つまり，

$$p_M = \frac{\alpha}{2-\alpha}. \tag{115}$$

ここで，$p_L + p_L + p_M = 1$ が成立する。

4.2.2　先制投資均衡

$L(\theta) > F(\theta)$となるθの領域$(\theta_P,\ \theta_F)$では，どの企業も先導者となるインセンティブを持つ。いま，企業 i が開ループ戦略に従って（あるいは独占企業のように），先導者のオプション価値を最大にするような閾値θ_Lで投資を試みたとする。このとき，企業 j の追随者価値は $F(\theta_L)$となる。命題 1 より $L(\theta_L) > F(\theta_L)$であり，$L$ は連続関数なので，$L(\theta_L - \varepsilon) > F(\theta_L)$となる。それゆえ，企業 j は企業 i を先制して$\theta_L - \varepsilon$で投資することで，価値を向上させることができる。企業 i の価値は $F(\theta_L - \varepsilon)$となるが，$L(\theta_L - 2\varepsilon) > F(\theta_L - \varepsilon)$であるから，企業 j の先制投資を予想した企業 i は，$\theta_L - 2\varepsilon$で投資して先導者になろうとする。このことを予想した企業 j は，$\theta_L - 3\varepsilon$でさらなる先制投資をする。このように，$\theta > \theta_P$である限り $L(\theta) > F(\theta)$となるので，両企業とも相手企業よりも先んじて投資しようとする。つまり，企業間で先導者となるための競争が繰り広げられ，オプション・ゲームは「先制ゲーム（preemption game）」の性質を示す。

一方，$\theta < \theta_P$では $F(\theta) > L(\theta)$となるので，先導者になるインセンティブを持つ企業はいない。つまり，どの企業も相手企業による先制投資の恐れに直面することはない。これは，状態があまりにも低水準であるため，相手より先んじて投資しても，投資費用 I を賄えるほどの採算が取れないからである。このときは，状態がさらに良くなるまで投資を待つほうが価値は高くなる。つまり，

オプション・ゲームは「消耗戦（war of attrition）」の性質を示す。

以上の議論から，先導者の閾値は先制閾値θ_Pとなる。$\theta \in (0,\ \theta_F)$では$F(\theta) > M(\theta)$となるので（性質８），先導者が$\theta_P$で投資したときは，他の企業は$\theta_P$で同時に投資するよりも，$\theta_F$まで投資を待って追随者となるほうが価値は高くなる。

均衡での先導者価値は$L(\theta_P)$となり，追随者価値$F(\theta_P)$と同じ水準である。これは，「レント均等化（rent equalization）命題」と呼ばれ，互いに先導者になるべく相手企業を先制しようとして，先導者のオプション価値を最大化する閾値θ_Lよりも早く，さらには先導者のレントが消滅してしまうほど早く投資するという現象である。

先制投資均衡についてより正確に述べると，初期状態$\theta(0) = \theta_0$から始まる部分ゲームに応じて，先導者の閾値は変わる。次の３つの部分ゲームを考えることができる。

ｉ）$\theta_0 \leq \theta_P$のとき，$F(\theta_0) \geq L(\theta_0)$であるから，$\alpha = 0$となり，どの企業も投資しない。$\theta(t) = \theta_P$に到達すると，どちらかの企業が投資を実行する。$L(\theta_P) = F(\theta_P)$より，$\alpha(\theta_P) = 0$となる[38]。これより，$p_L = 1/2$，$p_M = 0$である。つまり，$\theta(t) = \theta_P$で，どちらかの企業が確率1/2で先導者として投資を行い，両企業が同時に投資することはない[39]。

ⅱ）$\theta_0 \in (\theta_P,\ \theta_F)$のとき，$L(\theta_0) > F(\theta_0)$となるから，両企業とも先導者として投資することを目指す。(111)式，(113)式，(115)式より，

$$\alpha(\theta_0) = \frac{L(\theta_0) - F(\theta_0)}{L(\theta_0) - C(\theta_0)} > 0, \tag{116}$$

38) より正確には，θ_Pよりもわずかに大きな値で$\alpha > 0$となるので，この状態でどちらかの企業が先導者として投資をする。したがって，ほぼθ_Pで投資すると見なしてもよい。

39) Dixit and Pindyck（1994）等の初期モデルでは，θ_Pで両企業が先導者として投資するインセンティブを持つときは，（コインを投げるなどして）確率1/2で一方の企業にのみ投資機会を与えると仮定している。これは，$\theta_0 \leq \theta_P$のケースに限り正しい仮定であった。

$$p_L = \frac{1-\alpha(\theta_0)}{2-\alpha(\theta_0)} > 0, \tag{117}$$

$$p_M = \frac{\alpha(\theta_0)}{2-\alpha(\theta_0)} > 0. \tag{118}$$

このことから，θ_0では両企業とも混合戦略に従って投資をする。先導者になった企業はθ_0で投資をし，他の企業はθ_Fで投資をして追随者となる。この事態が発生する確率がp_Lである。また，$p_M > 0$より，θ_0で両企業が同時に投資する可能性がある。このときは，$L(\theta_0) > F(\theta_0) > M(\theta_0)$なので（性質８，10），同時に投資してしまうと，両企業とも最も低い価値を得ることになる（協調の失敗（coordination failure））。

θ_0での価値の期待値は,

$$\begin{aligned} V(\alpha_i(\theta_0), \alpha_j(\theta_0)) &= p_L L(\theta_0) + p_L F(\theta_0) + p_M M(\theta_0) \\ &= \frac{1-\alpha(\theta_0)}{2-\alpha(\theta_0)}\{L(\theta_0)+F(\theta_0)\} + \frac{\alpha(\theta_0)}{2-\alpha(\theta_0)} M(\theta_0) \\ &= F(\theta_0). \end{aligned} \tag{119}$$

つまり，θ_0ですぐに投資しても，あるいは追随者としてθ_Fで投資しても，期待値で見るとどちらの価値も同じになる。

iii）$\theta_0 \geq \theta_F$のとき, 両企業ともθ_0で同時に投資をする。このとき, $M(\theta_0) = L(\theta_0) = F(\theta_0)$，$\alpha(\theta_0) = 1$となる。

以上より，閉ループ均衡(α^*, G^*)は,

$$\alpha^*(\theta) = \begin{cases} 0 & （\theta < \theta_P のとき） \\ \dfrac{L(\theta)-F(\theta)}{L(\theta)-M(\theta)} & （\theta \in [\theta_P, \theta_F] のとき） \\ 1 & （\theta > \theta_F のとき）. \end{cases} \tag{120}$$

これより,

$$G^*(\theta) = \begin{cases} 0 & （\theta < \theta_P のとき） \\ 1 & （\theta \geq \theta_P のとき）. \end{cases}$$

・先制投資均衡（$\theta_0 \leq \theta_P$ のとき）
先導者はθ_Pで投資し，追随者はθ_Fで投資する。

追随者の閾値θ_Fは開ループ均衡と同じなので，閉ループ均衡戦略は事前コミットメントされた投資のタイミングと変わらない。なぜならば，追随者として投資することは，オプションの占有者と同じであるので，相手企業の戦略を考慮に入れず投資を決定するからである。したがって，戦略効果はなく，開ループ戦略と同じようにオプション価値が最大になる閾値で投資するのである。

これに対して，先導者の閾値はθ_P（$< \theta_L$）となり，開ループ均衡よりも投資時期が早まる。開ループ均衡戦略θ_Lには，オプション効果のみが考慮されているが，閉ループ均衡戦略θ_Pには，先制ゲームをプレイすることによる戦略効果が含まれている。したがって，投資決定について戦略効果が支配し，オプション価値を最大にする閾値よりも早く投資する。

オプション効果が強くなると投資時間は遅れるが，戦略効果が強いと投資時間を早めることから，２つの効果は互いにトレード・オフの関係にある。また，先導者価値は戦略効果が強く作用し，追随者価値はオプション効果が強く作用することが分かる。

4.2.3　共同投資均衡

企業間で投資のタイミングを調整して，価値が最大になる閾値θ_Cで共同投資をする均衡を考える。この均衡は「共謀の解（collusion solution）」と同じ結果をもたらす。共謀の解とは，ゲームが始まる前に企業間で投資のタイミングに関する話し合いが行われ，結合価値を最大にするように協調して投資するときの閾値である。対称企業であることから，結合価値は(40)式を２倍にしたものである。自企業の価値 $C(\theta)$が最大化されているならば，相手企業についても最大化されている。これより，$\theta^{**} = \theta_C$で同時に投資することが共謀の解となる。共同投資均衡では，両企業の間で話し合いがないにも関わらず，共謀の解が閉ループ均衡として実現する。相手企業がθ_Cで投資しているとき，先導者になろうと逸脱してθ_L（$< \theta_C$）での投資を試みると，相手企業の先制投資を引き起こ

し，結局はレントが消滅するほどに投資時間は早まってしまう。共同投資均衡が維持される背後には，このような最悪の事態を避けることが，両企業間で暗黙のうちに合意されている。その意味から，共同投資均衡は「暗黙の共謀（tacit collusion）」がもたらす結果であると解釈することができる。

閉ループ均衡(α^*, G^*)は，

$$\alpha^*(\theta) = \begin{cases} 0 & (\theta < \theta_C) \\ 1 & (\theta \geq \theta_C) \end{cases}. \tag{122}$$

これより，

$$G^*(\theta) = \begin{cases} 0 & (\theta < \theta_C) \\ 1 & (\theta \geq \theta_C) \end{cases}. \tag{123}$$

・共同投資均衡（$\theta_0 \leq \theta_C$のとき）

両企業ともθ_Cで投資を行う。

$\theta_C > \theta_F > \theta_L$であるから，共同投資が実行される時間は，開ループ均衡よりも遅くなることが分かる。この結果は，共謀の解で得られるオプション価値が，開ループ均衡でのそれよりも高いことを意味している。したがって，共謀の解とは，オプション価値が最大限に発揮されるように，投資に関する協力関係が企業間で形成されることであると解釈できる。この協力関係が，閉ループ均衡でも共同投資均衡として達成されるのである。

4.2.4　均衡が成立する条件

先制投資均衡と共同投資均衡のどちらが成立するかは，先導者の価値関数$L(\theta)$と，共同投資の価値関数 $C(\theta)$との大小関係によって決まる（性質 13）。次の２つのケースを考えることができる。

ケース１：$L(\theta) > C(\theta)$となる$\theta \in (0, \theta_F)$が，１つでも存在する。

ケース１では先制投資均衡のみ生じる。仮に両企業の間で共同投資を行う合意が得られたとしても，$L(\hat{\theta}) > C(\hat{\theta})$ となる $\hat{\theta}$ が存在する限りは，どの企業も逸脱

して$\hat{\theta}$で投資をするインセンティブを持つ。すると，相手企業は$\hat{\theta}-\varepsilon$で先制投資をしようとする。という具合に，θ_Pに至るまで先制投資の恐れが続くことになる。

ケース２：どのような$\theta \in (0, \theta_F)$に対しても，$C(\theta) > L(\theta)$が成立する。
ケース２では，共同投資均衡が生じる[40)]。どちらの企業にとっても，θ_Cで投資することが支配戦略となるので，逸脱して先導者になっても価値が低下するだけである。

40) このケースでは，無数の閾値について共同投資をすることが均衡となる。つまり，共同投資均衡は複数存在する。また，共同投資の閾値によっては，先制投資均衡も起こりうる。複数均衡について，具体的に述べると次のようになる。θ**で共同投資するときの価値を$C(\theta;\ \theta^{**})$とし，$L(\theta) = C(\theta;\ \theta^{**})$となる$\theta$**を$\theta_S$とする（図３参照）。$C(\theta;\ \cdot)$は$\theta$**の増加関数より（そして，$\theta_C$で最大となる），$\hat{\theta} \in [\theta_S, \theta_C]$では，任意の$\theta$について$L(\theta) \le C(\theta;\hat{\theta})$となるので，どの企業も先導者として投資するインセンティブは持たず，閾値$\hat{\theta}$まで待って共同投資をする。ただし，$\theta^{**} < \theta_S$では，$L(\theta) \ge C(\theta;\ \theta^{**})$となり，ケース１と同じであるので，先制投資均衡が生じる。焦点（focal point）の考えに従うと，複数均衡のうちパレート支配する均衡が，両企業に受け入れられやすく，実現しやすいと考えるので，θ_Cでの共同投資が焦点となる。

図１：ケース１における価値関数のグラフ

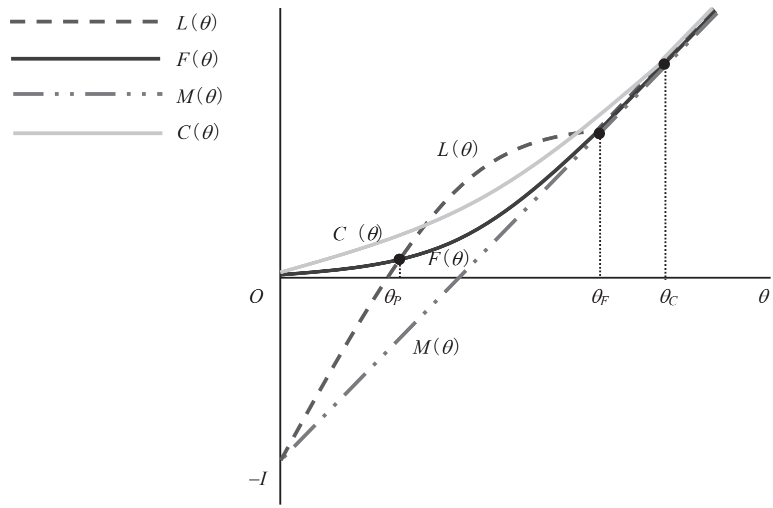


図２：ケース２における価値関数のグラフ

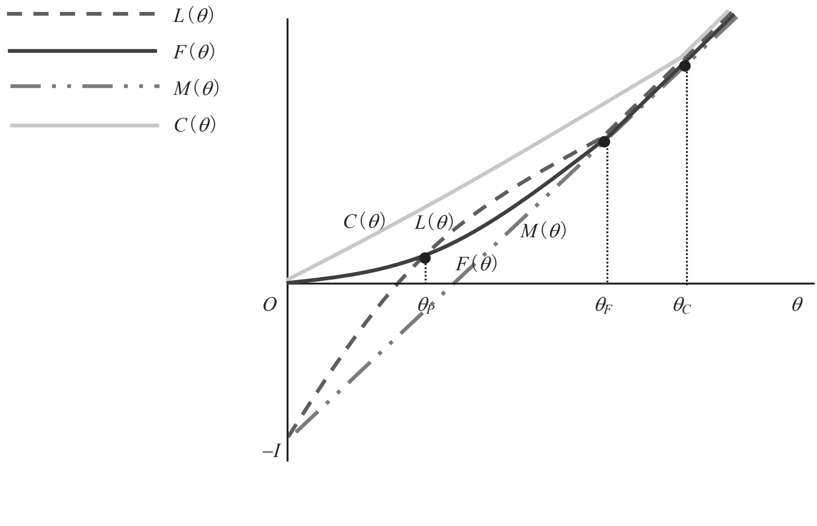
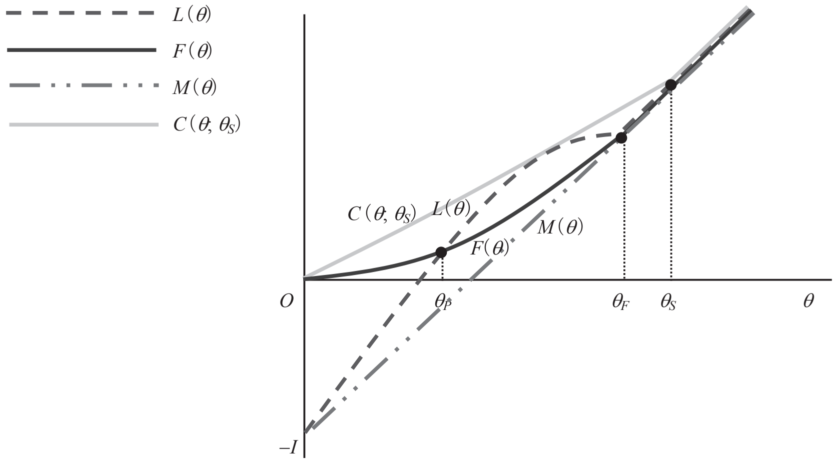


図３：ケース２における価値関数のグラフ（θ_Sで共同投資をするとき）



次に，ケース１あるいはケース２が成立するときの，パラメータが満たすべき関係について検討する。$C(\theta)$と$L(\theta)$の差を表す関数を，

$$\Delta_{CL}(\theta) = C(\theta) - L(\theta)$$
$$= I + \frac{\theta(\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_L)}{r-\mu} + \left(\frac{{\theta_C}^{1-\beta_1}}{\beta_1} \frac{\bar{\pi}_C - \bar{\pi}_0}{r-\mu} + {\theta_F}^{1-\beta_1} \frac{\bar{\pi}_L - \bar{\pi}_C}{r-\mu} \right) \theta^{\beta_1} \quad (124)$$

と定義する。これより，２つのケースは次のように書き換えられる。

ケース１：$\Delta_{CL}(\theta) < 0$ となる$\theta \in (0, \theta_F)$が，１つでも存在する。

ケース２：どのような$\theta \in (0, \theta_F)$についても，$\Delta_{CL}(\theta) \geq 0$ となる。

$\Delta_{CL}(\theta_P) > 0$，$\Delta_{CL}(\theta_F) > 0$ より（性質 11，性質 12），$\Delta_{CL}(\theta)$の最小値がマイナスならば，ケース１が成立する。ここで，

$$\Delta'_{CL}(\theta) = \frac{\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_L}{r-\mu} + \beta_1 \left(\frac{{\theta_C}^{1-\beta_1}}{\beta_1} \frac{\bar{\pi}_C - \bar{\pi}_0}{r-\mu} + {\theta_F}^{1-\beta_1} \frac{\bar{\pi}_L - \bar{\pi}_C}{r-\mu} \right) \theta^{\beta_1 - 1}, \quad (125)$$

$$\Delta''_{CL}(\theta)=\beta_1(\beta_1-1)\left(\frac{\theta_C^{1-\beta_1}}{\beta_1}\frac{\bar{\pi}_C-\bar{\pi}_0}{r-\mu}+\theta_F^{1-\beta_1}\frac{\bar{\pi}_L-\bar{\pi}_C}{r-\mu}\right)\theta^{\beta_1-2}>0\,. \tag{126}$$

$\Delta_{CL}(\theta)$を最小にするθを$\bar{\theta}$とすると[41],

$$\bar{\theta}=\left\{\frac{\bar{\pi}_L-\bar{\pi}_0}{\theta_L^{1-\beta_1}(\bar{\pi}_C-\bar{\pi}_0)+\beta_1\theta_F^{1-\beta_1}(\bar{\pi}_L-\bar{\pi}_C)}\right\}^{\frac{1}{\beta_1-1}}. \tag{127}$$

したがって，$\Delta_{CL}(\theta)$の最小値が，

$$\Delta_{CL}(\bar{\theta})=I+(\bar{\pi}_L-\bar{\pi}_0)^{\frac{\beta_1}{\beta_1-1}}\left\{\frac{\theta_C^{1-\beta_1}}{\beta_1}(\bar{\pi}_C-\bar{\pi}_0)+\theta_F^{1-\beta_1}(\bar{\pi}_L-\bar{\pi}_C)\right\}^{\frac{1}{1-\beta_1}}\frac{\beta_1^{\frac{\beta_1}{1-\beta_1}}-\beta_1^{\frac{1}{1-\beta_1}}}{r-\mu}<0 \tag{128}$$

となればケース１が成立する。θ_C，θ_Fの値を代入して整理すると，

$$\left\{\left(\frac{\bar{\pi}_C-\bar{\pi}_0}{\bar{\pi}_L-\bar{\pi}_0}\right)^{\beta_1}+\beta_1\left(\frac{\bar{\pi}_L-\bar{\pi}_C}{\bar{\pi}_C-\bar{\pi}_F}\right)\left(\frac{\bar{\pi}_C-\bar{\pi}_F}{\bar{\pi}_L-\bar{\pi}_0}\right)^{\beta_1}\right\}^{\frac{1}{1-\beta_1}}>1\,. \tag{129}$$

これより，

$$\left(\frac{\bar{\pi}_L-\bar{\pi}_0}{\bar{\pi}_C-\bar{\pi}_F}\right)^{\beta_1}-\left(\frac{\bar{\pi}_C-\bar{\pi}_0}{\bar{\pi}_C-\bar{\pi}_F}\right)^{\beta_1}>\beta_1\left(\frac{\bar{\pi}_L-\bar{\pi}_C}{\bar{\pi}_C-\bar{\pi}_F}\right) \tag{130}$$

ならばケース１が成立し，先制投資均衡が生じる。不等号が逆のときはケース２が成立し，共同投資均衡が生じる。どちらの均衡が起こるかは，パラメータ$\bar{\pi}_0,\bar{\pi}_L,\bar{\pi}_F,\bar{\pi}_C$，および$\beta_1$によって決まる[42]。$\beta_1>1$，$(\bar{\pi}_L-\bar{\pi}_0)/(\bar{\pi}_C-\bar{\pi}_F)>1$，$(\bar{\pi}_C-\bar{\pi}_0)/(\bar{\pi}_C-\bar{\pi}_F)<1$より，$\beta_1$が大きくなるほど，(130)式左辺は右辺と比べてより大きくなる。また，β_1はμとσの減少関数，rの増加関数であることは容易に示される。したがって，均衡の成立について，次のようにまとめることができる。

---

41) $0<\bar{\theta}\le\theta_F$となることは証明されている（Huisman（2002）参照）。

42) 投資費用Iは，すべての閾値を同じ比率で変化させるだけなので，均衡の成立に影響を与えない。

(1) 先制投資均衡が成立する条件：$\bar{\pi}_L$ が大きい，$\bar{\pi}_F$ が大きい，$\bar{\pi}_C$ が小さい，$\bar{\pi}_0$ が小さい，σが小さい，μが小さい，r が大きい，のいずれかが成立する

(2) 共同投資均衡が成立する条件：$\bar{\pi}_L$ が小さい，$\bar{\pi}_F$ が小さい，$\bar{\pi}_C$ が大きい，$\bar{\pi}_0$ が大きい，σが大きい，μが大きい，r が小さい，のいずれかが成立する

先手の利益 $(\bar{\pi}_L - \bar{\pi}_0) - (\bar{\pi}_C - \bar{\pi}_F)$ が大きいと，戦略効果がゲームを支配し，相手企業よりも先に投資して先導者になるインセンティブも強くなる。このような状況では，先制投資均衡が成立する。一方，不確実性σや期待成長率μが大きいほど，また割引率 r が小さい（将来価値の割引が小さい）ほど，オプション効果がゲームを支配し，投資実行を延期することのメリットが大きくなる。このような状況では，共同投資均衡が成立する。

θ_P，θ_F，θ_C はβ_1 の減少関数であるので[43]，不確実性が大きいほど閾値が大きくなり，それだけ投資実行が遅くなる。これは，独占で考えたリアル・オプションの古典的研究で主張された結果と整合的である。オプション・ゲームではさらなる知見が得られる。すなわち，不確実性が大きいほど，先制投資均衡から共同投資均衡へと均衡の性質が変化する（閾値が$\{\theta_P, \theta_F\}$から$\{\theta_C, \theta_C\}$へと変化する）ことにより，投資実行の時間がさらに遅くなる。

特殊なケースとして，$\bar{\pi}_0 = \bar{\pi}_F = 0$ となる状況を考える。これは，初期時点ではどの企業も市場で活動しておらず，投資をすることで初めて市場への参入が可能になる（新市場モデル）。追随者は投資前には利潤フローを得ていないので， 先導者が投資しても利潤フローに影響がない。(20)式と(39)式より $\theta_F = \theta_C$ となり，また(21)式と(40)式より，追随者の価値曲線と共同投資の価値曲線は一致する。このことから，新市場モデルでは共同投資均衡は生じず，先制投資均

43) (21)式より F はβ_1 の減少関数，(29)式より L はβ_1 の増加関数であるから，θ_P はβ_1 の減少関数となる。

衡のみ成立する。(130)式は，

$$\left(\frac{\bar{\pi}_L}{\bar{\pi}_C}\right)^{\beta_1} - \beta_1\left(\frac{\bar{\pi}_L}{\bar{\pi}_C}\right) + \beta_1 - 1 > 0 \tag{131}$$

となり，常にケース１が成立する[44)]。

５．産業組織分析への展開

以上，不確実性下における２企業間の投資競争をオプション・ゲームとして捉え，汎用性のある標準モデルを構築して，均衡を導き出した。ここではまとめに代えて，この標準モデルの分析から導かれた結果が，産業組織論の理論研究にどのように応用できるかについて，具体的なトピックを取り上げながら検討する。

すでに耐久財を販売している２企業が，ともに新製品を市場へと導入するタイミングを計る状況を考える（既存市場モデル）。新製品導入の目的は，計画された陳腐化（planned obsolescence）により，飽和した需要に対して買い替え需要を引き起こすことである。先制投資均衡では，先導者が先手の利益を得るべくいち早く新製品を導入し，これに対して，追随者はオプション効果を享受するべく遅れて導入する。このとき，先導者は相手企業による先制導入の恐れに直面し，レントが消滅するほど早く導入してしまう。このような状況が生じる市場は，不確実性が小さく，期待成長率も低い，成熟し安定した市場である。また，企業は将来の利益よりも，現時点で得る利益のほうに重きを置いている。そして，相手企業よりも先に新製品を導入して，大きな市場シェアを獲得することにメリットがある。

一方で，共同投資均衡は，先手の利益がさほど大きくなく，オプション効果が支配するため，新製品の先制導入競争を引き起こさないよう暗黙のうちに共謀して，時間を遅らせて同じタイミングで導入する。このような状況が生じる

---

44) 左辺を $f(x) = x^{\beta} - \beta x + \beta - 1$ とおくと，$x > 1$，$f(1) = 0$，$f'(x) = \beta(x - 1) > 0$ より $f(x) > 0$ が証明される。

市場は，不確実性が大きく，期待成長率が高いという，成長分野がゆえに不安定な市場である。また，企業は現在の利益よりも，将来の利益のほうを重要視している。成長著しい市場なので，追随導入しても価値が小さくなることはない。このような市場では，新製品に対する消費者の評価に大きな不確実性があり，どれくらいの買い替え需要が確保できるのか分からないため，導入について慎重になる。

新市場モデルでは，先制投資均衡のみ成立する。つまり，これまでなかった新しい市場には，相手企業よりもいち早く参入して，市場シェアを大きく獲得することが最適となる。後から参入した企業には，残されたわずかな市場シェアしかなく，不利な立場に追い込まれる。

このように，新製品導入の理論をオプション・ゲームの視点から分析することで，導入のタイミングについて多くの知見が得られた。ただし，産業組織論の具体的なトピックを扱うときは，より厳密な分析をするためにも，外生的に与えられていた利潤フロー π について，ミクロ的基礎付けを行い，生産物市場における企業の利潤最大化行動から縮約型として導出する必要がある。つまり，利潤フローを様々なパラメータにより具体的な形で明示したうえで，均衡の性質を検討するのである。パラメータとしては，例えば，限界費用や製品差別化の程度，あるいは需要の価格弾力性や新製品の品質向上率などが考えられる。想定するパラメータによっては，仮定２や仮定３で提示された利潤フローの関係が成立しない可能性もあるが，それでも依然として均衡が導出できるケースは多いだろう。

オプション・ゲームで分析対象としている投資には，M&A や市場参入・撤退の決定，R&D や技術採用，新製品導入などがあるが，これらはいずれも産業の進化に影響を与える要因となる。具体的に述べると，M&A や市場参入・撤退は，市場で活動する企業数を増減させる。また，R&D や技術採用，あるいは新製品導入は，革新技術が市場でどの程度普及するかを決める。このことからも，オプション・ゲームによる分析は，産業進化の理論的基盤となることが期待される。本論で得られた結果を産業進化の文脈で解釈すると，先制投資均衡は産業進化のスピードを早め，共同投資均衡は進化のスピードを遅らせること

になる。そして，このスピードは，$\bar{\pi}$，σ，μ，r といったパラメータによって決定されることになる。しかし，標準モデルで設定されなかった要因によっても，産業進化が大きな影響を受けるのは明らかである。以下では，そのいくつかを列挙する。(1) 企業の非対称性[45]。例えば，規模の大きな企業，あるいは費用の優位性を持つ企業が，参入・退出をする際，先導者・追随者のどちらの役割を果たすかを知ることは，産業進化を研究するうえでの重要な情報となる。(2) 複数回数の投資機会。つまり，製品の品質を徐々に向上させたり，生産費用を徐々に低下させたり，また生産能力を徐々に拡大させたりすることができるオプションを考える。あるいは，複数の企業に対して M&A を行ったり，複数の事業を新規に設立したり，いくつか経営している事業のうち一部を撤退させたりするオプションを考える。(3) 異なる種類のオプション。投資／撤退オプション，拡張／縮小オプション，中断／再開オプションといった，性質の違うオプションを複数所有しており，その中で価値が一番高いものを，好きなタイミングで行使できる。そして，相手企業のオプション行使が，これらのオプション価値に影響を与え，さらには，異なるオプション間でも影響を及ぼしあう。

このような要因を考慮に入れたオプション・ゲームは，より現実的な寡占競争を表現でき，複雑な産業動学を説明することができる。その研究成果は，産業組織論研究の発展にも大きく貢献することは間違いない。

---

45) 非対称企業のオプション・ゲームを分析した Pawlina and Kort（2006）で得られた結果を，以下にまとめる。競争優位のある企業，つまり投資費用や生産費用が低い企業，もしくは需要の大きい企業が先導者として投資する。均衡の種類は３つあり（(S)，(P)，(C) と呼称する)，その成立は企業の非対称性の大きさ（費用差）と先手の利益によって決定される。(S) 逐次投資均衡（sequential investment equilibrium）：先導者は，開ループ均衡の閾値（独占企業の閾値）θ_L で投資する。つまり，追随者の投資行動を考えずに（近視眼的に）投資する。これは，完全競争市場で議論した Leathy（1993）で示された結果が，寡占市場でも当てはまることを意味する。追随者は θ_F で投資する。(P) 先制投資均衡：本論と同じ結果となるが，非対称性があるときは，レント均等化命題は起こらず，先導者は正のレントを得る。(C) 共同投資均衡：本論と同じ結果である。先手の利益が一定で，費用差が大きくなるほど，(C) →(P) →(S)（場合によっては，(C) →(S)）の順に均衡が成立する。一方，費用差が一定で，先手の利益が大きくなるほど，(C) →(S)→(P)（場合によっては，(C)→(P)）の順に均衡が成立する。

参考文献

[1] Aguerrevere, F. (2003), “Equilibrium Investment Strategies and Output Price Behavior: A Real Options Approach.”, *Review of Financial Studies*, Vol.16, pp.1239-1272.

[2] Baldursson, F. (1998), “Irreversible Investment under Uncertainty in Oligopoly.”, *Journal of Economic Dynamic and Control*, Vol.22, pp.627-644.

[3] Bayer, C. (2007), “Investment Timing and Predatory Behavior in a Duopoly with Endogenous Exit.”, *Journal of Economic Dynamic and Control*, Vol.31, pp.3069-3109.

[4] Bouis, R., K. Huisman., and P.Kort. (2009), “Investment in Oligopoly under Uncertainty: The Accordion Effect.”, *International Journal of Industrial Organization*, Vol.27, pp.320-331

[5] Boyer, M., P. Lasserre., T. Mariotti., and M. Moreaux. (2004), “Preemption and Rent Dissipation under Price Competition.”, *International Journal of Industrial Organization*, Vol.22, pp.309-328.

[6] Boyer, M., P. Lasserre., and M. Moreaux. (2012), “A Dynamic Duopoly Investment Game without Commitment under Uncertain Market Expansion.”, *International Journal of Industrial Organization*, Vol.30, pp.663-681.

[7] Chevalier-Roignantm B. and L. Trigeorgis. (2011), *Competitive Strategy*: *Options and Games,* MIT Press.

[8] Cottrell, T. and G. Sick. (2001), “First-mover (dis) advantage and Real Options.”, *Journal of Applied Corporate Finance*, Vol.14, pp.41-51.

[9] Cottrell, T. and G. Sick. (2002), “Real Options and Follower Strategies: The Loss of Real Option Value to First-Mover Advantage.”, *Engineering Economist*, Vol.47, pp.232-263.

[10] Décamps, J-P. and T. Mariotti. (2004), “Investment Timing and Learning Externalities.”, *Journal of Economic Theory*, Vol.118, pp.80-102.

[11] Dias, M. and J. Teixeira. (2010), “Continuous-time Option Games: Review of Models and Extensions.”, *Multinational Finance Society*, Vol.14, pp.219-254.

[12] Dixit, A. and R. Pindyck. (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press.

[13] Fudenberg, D. and J. Tirole. (1985), “Pre-emption and Rent Equalization in the Adoption of New Technology.”, *Review of Economic Studies*, Vol.52, pp.383-401.

[14] Fudenberg, D. and J. Tirole. (1991) *Game Theory*, MIT Press.

[15] Grenadier, S. (1996), “The Strategic Exercise of Options: Development Cascades and Overbuilding in Real Estate Markets.”, *Journal of Finance*, Vol.51, pp.1653-1679.

[16] Grenadier, S. (1999), “Information Revelation through Option Exercise.”, *Review of Financial Studies*, Vol.12, pp.95-130.

[17] Grenadier, S. (2000), “Option Exercise Games: The Intersection of Real Options and Game Theory.”, *Journal of Applied Corporate Finance*, Vol.13, pp.99-107.

[18] Grenadier, S. (2002), “Option Exercise Games: An Application to the Equilibrium Investment Strategies of Firms.”, *Review of Financial Studies*, Vol.15, pp.691-721.

[19] Huisman, K. (2001), *Technology Investment*: *A Game Theoretic Real Options Approach*, Kluwer Academic Publishers.

[20] Huisman, K. and P. Kort. (2002), “Strategic Technology Investment under Uncertainty.”, *OR Spectrum*, Vol.24, pp.79-98.

[21] Huisman, K. and P. Kort. (2004), “Strategic Technology Adoption Taking into Account Future Technological Improvements: A Real Options Approach.”, *European Journal of Operational Research*, Vol.159, pp.705-728.

[22] Huisman, K., P. Kort., G. Pawlina., and J. Thijssen. (2004), “Strategic Investment under Uncertainty: Merging Real Options with Game Theory.”, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, Vol.67, pp.97-123.

[23] Joaquin, D. and K. Butler. (1999), “Competitive Investment Decisions: A Synthesis.”, In Brennan, M. and L. Trigeorgis. (eds.), *Project Flexibility*, *Agency*, *and Competition*: *New Developments in the Theory and Applications of Real Options*, Oxford University Press, pp.324-339.

[24] Kong, J. and Y. Kwok. (2007), “Real Options in Strategic Investment Games between Two Asymmetric Firms.”, *European Journal of Operational Research*, Vol.181, pp.976-985.

[25] Kulatilaka, N. and E. Perotti. (1998), “Strategic Growth Options.”, *Management Science*, Vol.44, pp.1021-1031.

[26] Lambrecht, B. (1999), “Strategic Sequential Investment and Sleeping Patents.”, In Brennan, M. and L. Trigeorgis. (eds.), *Project Flexibility*, *Agency*, *and Competition*: *New Developments in the Theory and Applications of Real Options*, Oxford University Press, pp.297-323.

[27] Lambrecht, B. and W. Perraudin. (2003), “Real Options and Preemption under Incomplete Information.”, *Journal of Economic Dynamic and Control*, Vol.27, pp.619-643.

[28] Leahy, J. (1993), “Investment in Competitive Equilibrium: The Optimality of Myopic Behavior.”, *Quarterly Journal of Economics*, Vol.108, pp.1105-1133.

[29] Mason, R. and H. Weeds. (2010), “Investment Uncertainty and Pre-emption.”, *International Journal of Industrial Organization*, Vol.28, pp.278-287.

[30] Murto, P. (2004), “Exit in Duopoly under Uncertainty”, *Rand Journal of Economics*, Vol.35, pp.111-127.

[31] Murto, P. and J. Keppo. (2002), “A Game Model of Irreversible Investment under Uncertainty.”, *International Game Theory Review*, Vol.4, pp.127-140.

[32] Murto, P., E. Näsäkkäla., and J. Keppo. (2004), “Timing of Investments in Oligopoly under Uncertainty: A Framework for Numerical Analysis.”, *European Journal of Operational Research*, Vol.157, pp.486-500.

[33] Nielson, M. (2002), “Competition and Irreversible Investment.”, *International Journal of Industrial Organization*, Vol.20, pp.713-743.

[34] O'Brien, J. and T.Folta. (2009), “Sunk Costs, Uncertainty and Market Exit: A Real Options Perspective. ”, *Industrial and Corporate Change*, Vol.18, pp.807-833.

[35] Pawlina, G. and P.Kort. (2006), “Real Options in an Asymmetric Duopoly: Who Benefits from Your Competitive Disadvantage?”, *Journal of Economics and Management Strategy*, Vol.15, pp.1-35.

[36] Pawlina, G. and P.Kort. (2010), “Strategic Quality Choice under Uncertainty: A Real Options Approach.”, *Manchester School*, Vol.78, pp.1-19.

[37] Paxson, D. and H. Pinto. (2003), “Leader/Follower Real Value Functions if the Market Share Follows a Birth/Death Process.”, In Paxson, D. (ed.), *Real R&D Options*, Butterworth-Heinemann, pp.208-228.

[38] Paxson, D. and H. Pinto. (2005), “Rivalry under Price and Quantity Uncertainty.”, *Review of Financial Economics*, Vol.14, pp.209-224.

[39] Shackleton, M., A. Tsekrekos., and R. Wojakowski. (2004), “Strategic Entry and Market Leadership in a Two-Player Real Options Game.”, *Journal of Banking&Finance*, Vol.28, pp.179-201.

[40] Smit, H. and L. Ankum. (1993), “A Real Options and Game-Theoretic Approach to

Corporate Investment Strategy under Competition.”, *Financial Management*, Autumn, pp. 241-250.

[41] Smit, H. (2003), “Infrastructure Investment as a Real Options Game: The Case of European Airport Expansion.”, *Financial Management*, Winter, pp.5-35.

[42] Smit, H. and L. Trigeorgis. (2004), *Strategic Investment*: *Real Options and Games*, Princeton University Press.

[43] Smit, H. and L. Trigeorgis. (2006), “Real Options and Games: Competition, Alliances and Other Applications of Valuation and Strategy.”, *Review of Financial Economics*, Vol.15, pp.95-112.

[44] Sparla, T. (2004), “Closure Options in a Duopoly with Strong Strategic Externalities”, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, Vol.67, pp. 125-155.

[45] Thijssen, J., K. Huisman., and P. Kort. (2010), “Symmetric Equilibrium Strategies in Game Theoretic Option Models.”, *Journal of Mathematical Economics*, Vol.48, pp. 219-225.

[46] Tsekrekos, A. (2003), “First-mover Advantage on the Strategic Exercise of Real Options.”, In Paxson, D.(ed.), *Real R&D Options*, Butterworth-Heinemann, pp.185-207.

[47] Williams, J. (1993), “Equilibrium and Options on Real Assets.”, *Review of Financial Studies*, Vol. 6, pp.825-850.

[48] Weed, H. (2002), “Strategic Delay in a Real Options Model of R&D Competition.”, *Review of Economic Studies*, Vol. 69, pp.729-747.